第 21 卷	第2期	CT 理论与应用研究	Vol.21,	No. 2
2012年6,	月(169-178)	CT Theory and Applications	Jun.,	2012

阙介民, 王燕芳, 孙翠丽, 等. 基于不完备投影数据重建的四种迭代算法比较研究[J]. CT 理论与应用研究, 2012, 21(2): 169-178.

Que JM, Wang YF, Sun CL, et al. Comparison of four iterative algorithm based on incomplete projection reconstruction[J]. CT Theory and Applications, 2012, 21(2): 169-178.

基于不完备投影数据重建的四种迭代算法比较研究

阙介民^{1,2,3},王燕芳^{1,2⊠},孙翠丽^{1,2},魏存峰^{1,2},史戎坚^{1,2},魏龙^{1,2}

1. 北京市射线成像技术与装备工程技术研究中心,北京100049

2. 中国科学院高能物理研究所核分析技术重点实验室,北京 100049

3. 中国科学院研究生院,北京 100049

摘要: 在发射成像和穿透成像过程中,由于各种原因会造成投影数据不完备,若仍采用传统解 析方法重建出的图像会产生伪影,而迭代算法则可以很好地改善图像质量。本文应用不同的迭 代算法分别就真实标准线对测试卡的稀疏投影数据和有限角度投影数据进行重建,定量分析比 较它们各自的优缺点,为几种迭代算法的工程或临床应用提供重要参考。

关键词:稀疏投影;有限角投影;迭代算法;图像总变差;MAP

文章编号: 1004-4140 (2012) 02-0169-10 中图分类号: TP 301.6 文献标识码: A

CT 图像重建的基本方法有两种:解析法和迭代法。解析法建立在连续信号模型上,对 噪声比较敏感且要求投影数据完备;迭代法建立在离散信号模型上,相比较解析法,迭代 法在低信噪比(低剂量)以及投影数据不完备的情况下,仍能重建出质量优于解析法的图 像。CT 在实际应用中,受检测环境、检测时间及受检物体特征等因素的影响,投影数据不 完备现象时常存在,主要表现为以下两种数据形式:①稀疏投影数据,即进行 360°CT 扫 描时,增大投影角度间隔,采样有限数目的数据(如 120 幅投影或更少)完成图像重建, 例如在乳腺专用 CT 系统中^[1],由于受到安全辐射剂量的限制,需要快速扫描乳腺结构,获 取的数据就属于稀疏投影数据;② 有限角度投影数据,即不进行完整的 360°CT 扫描,而 只是采样有限的角度数据(如 120°或更少角度)实现图像重建,例如 C-arm 系统对牙齿 CT 扫描采集的数据就属于有限角度投影数据,以上两种情况均不满足 Nyquist 采样定理,若 采用解析算法,如滤波反投影重建将产生影响图像质量的伪影。

目前,国内外许多专家学者针对 CT 不完备投影数据的重建问题都提出了解决方案,如高河伟等^[2]比较了几种有限角度 CT 图像重建算法的优缺点。梁文轩等^[3]通过压缩感知理论分析总变差(Total Variation)最小化方法并将其推广为更一般的不充分投影 CT 重建算法。李毅等^[4]运用 GP 的思想对数据进行补全从而改进迭代算法,并应用于有限角度 CT 图像重建证明其有效性。谢丹艳等^[5]采用 Bayes 重建稀疏数据,重建时间短,图像质量好,抗噪声能力强。王林元等^[6]主要介绍稀疏信号恢复理论在 CT 图像重建的应用。这些研究主要是针对迭代法进行的研究。近些年,随着计算机通用计算能力的快速提升和迭代算法自身的

收稿日期: 2011-11-09。

基金项目:国家自然科学基金(10905063)。

不断完善,比如对称性的运用^[7],重建速度问题已不再是制约其实用化的瓶颈,真正可以适 用于工程或临床低剂量成像系统的迭代算法也再次成为业界研究的热点,本文在这方面进 行了一些研究,选取四种比较典型的迭代算法,介绍其重建原理,分析不同算法对标准线 对测试卡的重建结果,并定量比较这四种算法在收敛速度、图像质量方面的优缺点,为迭 代算法的工程或临床应用提供重要参考,且具有较高的实用价值。

1 迭代算法概述

1.1 代数重建法 (ART)

ART 方法是将成像看成一个代数问题 Wf=P,这里 f 是待重建图像的向量, P 是探测器 接收到的信号量, W 是重建图像每个像素点对每根射线的贡献因子,如 w_{ijmn} 是重建像素 f(i, j) 在投影角度 n 下探测器第 m 个单元 P_{nm} 的权重因子。求解这一问题的典型方法是 Kaczmarz 算法^[8],其表达式如下:

$$\hat{f}_{ij}^{(k+1)} = \hat{f}_{ij}^{(k)} + \lambda w_{ijmn} \left(\frac{P_{mn} - \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} w_{ijmn} \hat{f}_{ij}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} w_{ijmn}^{2}} \right)$$
(1)

ART 迭代过程是从向量初始近似 $f^0 \in \mathbb{R}^n$ 开始. 第 k 次迭代 f^k 修正时,从投影数据中选择一个投影点,仅考虑该投影点所在的射线及变化与该射线相交的像素值,求出原始投影数据与 f^k 沿该射线理想的射线上的和(也称为伪投影)之差,进而修正该射线穿过的各像素(也称为校正过程),使沿该条射线的像素值在不改变其他像素的情况下与该射线对应的测量投影数据一致,以此产生新的迭代估计 f^{k+1} 。为了加快收敛速度,将块划分^[9]的方法应用于 ART 迭代中,相应的迭代公式如下:

$$\hat{f}_{ij}^{(k+1)} = \hat{f}_{ij}^{(k)} + \lambda \sum_{P_{m,n} \in P_{\varphi}} \left(w_{ijmn} \left(\frac{P_{mn} - \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} w_{ijmn} \hat{f}_{ij}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} w_{ijmn}^{2}} \right) \right)$$
(2)

其中λ是松弛因子,一般取值范围为(0,1]。

1.2 有序子集最大期望值重建算法(OSEM)

有序子集最大期望值(Ordered Subsets Expectation Maximization, OSEM)重建方 法是一种改进的最大似然期望法(Maximum Likelihood Expectation Maximization, MLEM)。 OSEM 方法属于"块"迭代法中的一种^[9-10],在每一次迭代过程中将投影数据分成 *L* 个子集, 一般将分成的子集要求相似性尽量低,从而加快重建图像靠近真实值,每一个子集中完成 对重建图像所有像素点值校正,重建图像便被更新一次,完成所有的子集运算,称为一次 迭代过程。在 MLEM 方法中一次迭代过程完成所有的投影数据对重建图像所有像素点的值进

171

行校正,重建图像才被更新一次,而 0SEM 方法一次迭代过程中重建图像被更新 L 次,从而 使迭代过程加快收敛的作用。此过程可以用下式描述:

$$f^{(k+1)}(i,j) = \frac{f^{(k)}(i,j) \sum_{n,m \in p_l} \frac{P_l w_{ijmn}}{\hat{P}_l(n,m)}}{\sum_{n,m \in p_l} w_{ijmn}}$$
(3)

 w_{ijmn} 意义同上, P_l 是投影数据划分的第l个子集, \hat{P}_l 是重建像素在每个子集l对应的投影角度n下探测器第m个单元的期望值:

$$\hat{P}_l(n.m) = \sum_{i,j} w_{ijmn} f^l(i,j) \quad n,m \in P_l$$
(4)

OSEM 较早应用在商业 ECT 设备数据重建中,由于它具有较好的重建图像质量和较短的 计算时间,目前逐渐应用于其他设备上。对于 OSEM 子集的划分,文献[11]中进行了详细的 分析和研究。

1.3 最小化图像总变差迭代算法(TV-ART)

对于不完备投影数据重建问题,基于各种重建判据的优化迭代重建算法是目前应用比 较多的方法。Sidky等^[12]提出了基于最小化图像总变差的优化准则的迭代重建算法。下面介 绍 TV-ART 算法的原理,图像总变差最小化的数学描述是:

$$\min \left\| f \right\|_{TV} \quad \exists \quad Wf = P, f_{ij} > 0 \tag{5}$$

在本算法中,使图像的总变差最小是通过图像总变差的逐渐减少来控制 ART 迭代的收敛,图像的总变差为:

$$\left\| f_{i,j} \right\|_{TV} = \sum_{i,j} \left| \nabla f_{i,j} \right| = \sum_{i,j} \left((f_{i,j} - f_{i-1,j})^2 + (f_{i,j} - f_{i,j-1})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
(6)

TV 中每个像素的梯度 v 表示为:

$$v_{i,j} = \frac{\partial \|f\|_{TV}}{\partial f_{i,j}} \approx \frac{(f_{i,j} - f_{i-1,j}) + (f_{i,j} - f_{i,j-1})}{\left(\varepsilon + (f_{i,j} - f_{i-1,j})^2 + (f_{i,j} - f_{i,j-1})^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(f_{i+1,j} - f_{i,j})}{\left(\varepsilon + (f_{i+1,j} - f_{i,j})^2 + (f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1})^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(f_{i,j+1} - f_{i,j})}{\left(\varepsilon + (f_{i,j+1} - f_{i,j})^2 + (f_{i,j+1} - f_{i,j-1})^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$
(7)

其中, ε 是一个很小的正数,一般取值 $\varepsilon = 10^{-8}$ 。式(6)只对图像非边界像素有效,并且在 实际计算中对 $v_{i,j}$ 进行归一化。一般图像的总变差只与图像中的轮廓有关,即使在数据不完 备的情况下,该算法也能较好保持边缘信息,在 ART 算法中加入 TV 约束,从而改进 ART 算 法,完成对不完备数据的重建,文献[12]中有详细算法步骤的描述。

1.4 最大后验概率迭代梯度下降法(MAP-ICD)

最大后验概率重建(maximum a posteriori reconstuction)方法是根据 Bayesian 定理:

$$w(x|y) = \frac{w(y|x)w(x)}{w(y)}$$
(8)

求出 $\hat{x}_{MAP} = \arg \max_{x} (\log w(y|x) + \log w(x))$,本文中采用 ICD/Newton-Raphson^[13]算法进行 求解。

假设图像先验概率符合广义高斯 Markov 随机场(GGMRF)^[14],用 ICD/Newton-Raphson 算法最终优化求解公式为:

$$0 = \theta_1(i,j) + \theta_2(i,j) \left(x - f^n(i,j) \right) + \frac{1}{\sigma^p} \sum_{\{(i,j),(u,v)\} \in C} b \left| x - f^n(u,v) \right|^{p-1} \operatorname{sign} \left(x - f^n(u,v) \right) \right|_{x = f^{n+1}(i,j)}$$
(9)

$$\theta_{1} = \sum_{n=1,m=1}^{N,M} w(i,j,n,m) \left(1 - \frac{y(n,m)w(i,j,n,m)}{\sum_{i=1,j=1}^{L,J} w(i,j,n,m)\lambda^{n}(i,j)} \right)$$
(10)

$$\theta_{2}(i,j) = \sum_{n=1,m=1}^{N,M} y(n,m) \left(\frac{w(i,j,n,m)}{\sum_{i=1,j=1}^{I,J} w(i,j,n,m)\lambda^{n}(i,j)} \right)^{2}$$
(11)

其中 w(i, j, n, m) 表示被测物体中一点 (i, j) 在第 n 角度下被第 m 个探测器探测到的概率, y(n,m) 是探测在投影角度 n 探测器 m 上的计数。 f(i, j) 是重建的一点。C 是 8 临域集, b 是 8 临域 MRF 系数, 对于水平垂直临域 $b = \sqrt{2}/(4(\sqrt{2}+1))$,对于对角临域 $b = 1/(4(\sqrt{2}+1))$ 。 p 是形状因子,一般 $1 , p 越小图像边缘越尖锐。<math>\sigma$ 是平滑因子, σ 越小图像越平滑, 本文中 σ 取值大于 1。由于 (9) 式是单调函数 (1),对其的求解可用中值法寻找。式 (9) 中单点的最优不一定是全局的最优,而且梯度法可能造成步进过大。解决的办法是对每次步进乘以一个系数 a, <math>0 < a < 1,为保持对不同大小的图像有相同的步进,a 一般应和 图像尺寸成反比,若 I = J = S,则 a = k/S,通过实验说明 k 取值范围为 $0 < k \le 10$,一般取值 小于 0.02。相应式 (9) 变为:

$$0 = \frac{\theta_{1}(i,j) + \theta_{2}(i,j)(x - f^{n}(i,j))}{\alpha} + \frac{1}{\sigma^{p}} \sum_{\{(i,j),(u,v)\} \in C} b |x - f^{n}(u,v)|^{p-1} \operatorname{sign} \left(x - f^{n}(u,v)\right) \bigg|_{x = f^{n+1}(i,j)}$$
(12)

172

2 实验结果及分析

不完备数据一般分两种情况,稀疏数据投影和有限角投影。为了验证四种算法的可行性,我们对实验数据进行了研究。

2.1 稀疏投影数据

原始数据是 CT 系统线对测试卡的投影,重建图像大小是 512×512,图 1 是 512 条射线 束 1 800 个投影角度数据 FBP 重建的结果,作为四种算法重建结果的参考标准。对图 1 中数 据在 0~360°范围内每 3°取一个投影,从而获取稀疏投影数据。本文迭代初始值取投影值 平均值,有时为了提高收敛速度,可以考虑 FBP 重建结果作为迭代初始值。本文首先从肉 眼观察对图像进行初步评定,最后从理论上采用下面两个评价指标^[15]对图像进行量化比较。

(1) 归一化均方距离判据 d, 即

$$d = \left(\frac{\sum_{u=1}^{N} \sum_{v=1}^{N} (t_{u,v} - r_{u,v})^2}{\sum_{u=1}^{N} \sum_{v=1}^{N} (t_{u,v} - \bar{t})^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(13)

式中, $t_{u,v}$, $r_{u,v}$ 分别表示测试模型(参考图像)和迭代重建后图像中第u行、第v列的像素密度; \bar{t} 为测试模型(参考图像)密度的平均值;图像的像素为 $N \times N$ 。



(a) 原始图 (FBP 重建)



(b) ART



图 1 稀疏投影数据不同迭代算法重建结果对比 Fig.1 Results reconstructed by different iterative algorithm for sparse projection

(2) 归一化平均绝对距离判据r,即,

$$=\frac{\sum_{u=1}^{N}\sum_{v=1}^{N}|t_{u,v} - r_{u,v}|}{\sum_{u=1}^{N}\sum_{v=1}^{N}|t_{u,v}|}$$
(14)

这两个指标的数值大小反映着图像质量的好坏。理想情况下,如果它们的数值越小, 那么表明重建图像与原始图像就越接近,也就是说重建图像的质量越好。

r

图 1 (a) 是完备数据 FBP 算法重建的结果,其他迭代算法的结果将与(a)进行对比。 图 1 (b) 和 (c) 是 10 次迭代的结果,由于 TV-ART 算法中每次最外层迭代中进行 ART 内迭 代5次,所以TV-ART很快就收敛,所以收敛次数小于5次;0S-AR算法和TV-ART算法中选 择相同的松弛因子。MAP-ICD 由于平滑因子的作用,一般需要 40 次以上的迭代次数才能达 到相对满意的效果。由于是稀疏数据,前三种算法都存在明显的条状伪影。





Fig. 2 Spatial resolution curve by different iterative algorithm for sparse projection

algorithm for sparse projection							
重建算法	迭代次数	d	r	迭代时间/s			
ART	10	0.3059	0. 292 5	10.718			
OSEM	10	0.4718	0. 449 1	9.109			
TV-ART	2	0.2954	0.3924	11.904			
MAP-ICD	40	0.2987	0. 221 4	205. 407			

表1 稀疏投影迭代重建算法性能分析 Table 1 Performance analysis of different iterative

表1中的比较都是针对图1(a)进行的,从表1中可以看出,平均每次迭代,OSEM算

21 卷

法最快,OS-ART 算法次之,TV-ART 算法最慢。在重建效果可以接收的情况下,TV-ART 算法 收敛速度最快,OSEM 算法次之,MAP-ICD 算法收敛最慢。与 FBP 完备数据重建的原图比较中,OSEM 算法的误差大,但是较好地保持了重建图像边缘细节,主要是由于实际数据噪声的影响。MAP-ICD 与原图的误差最小,主要因为该算法有很好的抑制噪声作用,但是损失了 图像的边缘细节。

2.2 有限角投影数据

为了验证四种算法对有限角投影重建的可行性,原始数据来源于图 1 (a)中的投影数据,在 0~120°范围取样,每间隔 0.4°均匀取样,重建图像是 512×512,重建后的图像与 图 1 (a)进行比较,结果见表 2。

Table2	Table2 Performance analysis of different iterative algorithm for limited-angle projection					
重建算法	迭代次数	d	r	迭代时间/s		
ART	10	0.7342	0.8653	78.172		
OSEM	10	0.6762	0.6643	66.657		
TV-ART	2	0.7126	0.9440	80. 515		
MAP-ICD	40	0.7179	0.7194	476.922		

表 2 有限角投影迭代重建算法性能分析



(a) OS-ART



(c) TV-ART



(b) OSEM



(d) MAP-ICD

- 图 3 有限角投影数据不同迭代算法重建结果对比
- Fig. 3 Results reconstructed by different iterative algorithm for limited-angle project

从表 2 中看出 OSEM 算法和 MAP-ICD 算法与原始图像最接近,从图 3 也可以证明这一点, MAP-ICD 算法虽然抑制了噪声水平但是平滑掉一些图像边缘细节,并且收敛速度慢。从图 4 中看出,OSEM 算法和 TV-ART 算法较好地保持了图像边缘的细节,特别是 TV-ART 算法对细 节有增强的效果。综合图像来看,OSEM 算法对于有限角投影数据重建效果最好,其次是 TV-ART 算法。



3 结论

本文针对不完备数据的两种典型情况,稀疏投影和有限角投影重建图像问题,介绍了 四种不同的迭代算法,即ART算法、OSEM算法、TV-ART算法以及MAP-ICD算法。这四种算 法为了加快收敛速度,都运用了分块加速的方法以及扇形束数据的对称性,提高了重建的 速度。

通过实验投影数据重建结果表明:对于稀疏投影数据和有限角投影数据,MAP-ICD 算法 抑制图像的噪声效果最好,但是损失了图像的细节特征,可以将此算法应用于计数率较低 的 PET 和 SPECT 系统中; OSEM 算法和 TV-ART 算法虽然抑制噪声水平一般,但保持图像的特 征效果最好; ART 算法是一个折中的算法。从工程应用的角度来看, OSEM 算法和 TV-ART 算 法对于 CT 系统具有更好的应用前景。

参考文献

 Boone JM, Nelson TR, Lindfors KK, et al. Dedicated breast CT: Radiation dose and image quality evaluation[J]. Radiology, 2001, 221(3): 657-667. [2] 高河伟,张丽,陈志强,等. 有限角 CT 图像重建算法综述[J]. CT 理论与应用研究, 2005, 14(1): 46-50.
 Coo WW Theory L Chen 70 et al. Paviewa of image reconstruction from limited-angle[I] CT

Gao HW, Zhang L, Chen ZQ, et al. Reviews of image reconstruction from limited-angle[J]. CT Theory and Applications, 2005, 14(1): 46-50.

- [3] 梁文轩, 胡广书. 关于不充分投影数据下的二维扇形束CT重建[J]. CT理论与应用研究, 2010, 19(3): 1-12.
 Liang WX, Hu GS. On the 2D fan-beam CT reconstruction from insufficient projection data[J].
 CT Theory and Applications, 2010, 19(3): 1-12.
- [4] 李毅,潘晋孝. 一种基于数据外插改进的 ART 迭代算法[J]. CT 理论与应用研究, 2011, 20(1): 21-27.
 Li Y, Pan JX. Base on date extrapolation improve ART iterations algorithm[J]. CT Theory and Applications, 2011, 20(1): 21-27.
- [5] 谢丹艳,井西利,任国朝.基于Bayes估计的稀疏数据CT重建算法研究[J].CT理论与应用研究,2008, 17(4): 8-14.
 Xie DY, Jing XL, Ren GZ, et al. CT reconstruction algorithms with sparse radiographs based
- on bayes estimates[J]. CT Theory and Applications, 2008, 17(4): 8-14.
 [6] 王林元,李磊,闫镔,等. 稀疏信号恢复理论在 CT 图像重建中的应用[J]. CT 理论与应用研究, 2009, 18(3): 22-39.

Wang LY, Li L, Yan B, et al. The application of sparse signal recovery theory in ct image reconstruction[J]. CT Theory and Applications, 2009, 18(3): 22-29.

[7] 张全红,路宏年,杨民,等.用对称反投影及递归迭代实现扇束CT快速重建[J].CT理论与应用研究,2004,13(4):16-19.
 Zhang QH, Lu HN, Yang M, et al. Fast reconstruction of fan-beam CT using symmetry

backprojection and iterative technique[J]. CT Theory and Applications, 2004, 13 (4): 16-19.

- [8] Kaczmarz S. Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen[J]. Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A, Sciences Mathématiques, 1937, 35: 355-357.
- [9] Hudson HM, Larkin RS. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data[J]. IEEE Transaction on Medical Imaging. 1994, 13(4): 601-609.
- [10] Schmidlin P, Matthias EB, Gunnar B. Subsets and overlaxation in iterative image reconstruction[J]. Physics in Medicine and Biology, 1999, 44(5): 1384-1396.
- [11] 印胤, 刘力. 扇束图像重建中 OSEM 算法及子集划分的研究[J]. CT 理论与应用研究, 2003, 12(3): 1-8.
 Yin Y, Liu L. Study of OSEM with different subsets in fan beam reconstruction [J]. CT Theory and Applications, 2003, 12(3): 1-8.
- [12] Sidky EY, Kao CM, Pan XC. Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT[J]. Journal of X-Ray Science and Technology, 2006, (14): 119-139.
- [13] Bouman CA. A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization, IEEE Trans[J]. Image Processing, 1996, 5(3): 480-492.
- [14] Bouman CA, Sauer K. A generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation, IEEE Trans[J]. Image Processing, 1993, 7(2): 296-310.
- [15] 庄天戈. CT 原理与算法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1992.

Comparison of Four Iterative Algorithm Based on Incomplete Projection Reconstruction

QUE Jie-min^{1,2,3}, WANG Yan-fang^{1,2⊠}, SUN Cui-li^{1,2}, WEI Cun-fen^{1,2}, SHI Rong-jian^{1,2}, WEI Long^{1,2}

- 1. Key Laboratory of Nuclear Analytical Techniques, Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100049, China
- 2. Beijing Engineering Research Center of Radiographic Techniques and Equipment, Beijing 100049, China
- 3. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, CAS, Beijing 100049, China

Abstract: In emission computerized tomography and transmission computerized tomography, the analytic algorithm reconstruction used incomplete data will result in image artifacts in the result reconstructed. But the iterative algorithm would improve the quality of reconstruction images. In this paper, four type iterative reconstruction algorithm is applied to experimental sparse projections and limited-angle projections of the resolution test phantom. Their advantage and disadvantages are analyzed quantitatively. The study will provide the reference for the clinical or engineering application of the algorithm.

Key words: sparse projection; limited-angle projection; iterative algorithm; total variance (TV); MAP



作者简介: 阙介民(1976-), 男, 在职博士, 中国科学院高能物理研究所副研究员, 主要从事工业 CT 相关技术研究, Tel: 010-88200020, E-mail: quejiemin@ihep.ac.cn; 王燕芳[∞](1977-), 博士, 中国科学院高能物理研究所副研究员, 主要从事工业 CT 图像后处理方面的研究, Tel: 010-88200020, E-mail: wangyf@ihep.ac.cn。