

史颖琴, 潘晋孝. Feldkamp-type-VOI 锥束 CT 重建算法加速的研究[J]. CT 球理论与应用研究, 2011, 20(1): 55-61.
Shi YQ, Pan JX. The research of reconstruction speed for the Feldkamp-type-VOI algorithm[J]. CT Theory and Applications, 2011, 20(1): 55-61.

Feldkamp-type-VOI 锥束 CT 重建算法加速的研究

史颖琴, 潘晋孝[✉]

(中北大学电子测试技术国家重点实验室, 太原, 030051)

摘要: 本文具体介绍了一种 Feldkamp-type 感兴趣区域锥束 CT 重建方法。首先, 我们分析了算法的特点; 继而利用锥束扫描模式存在的对称性的反投影优化性质进行算法优化; 最后, 通过 Shepp-Logan 数值模拟实验显示优化方法可有效提高图像重建的速度且几乎不影响图像质量。

关键词: 螺旋锥形束 CT; FDK 算法; 感兴趣区域; 图像重建;

文章编号: 1004-4140 (2011) 01-0055-07 **中图分类号:** TP 301. 6 **文献标识码:** A

近年来, 三维锥束 CT (Computed Tomography, CT) 在医学和工业上得到越来越广泛的应用, 锥束 CT 重建算法的优越性也就显得越来越明显。Parker^[1]和 Kudo 等^[2]先后提出基于圆形轨道的扇束短扫描和超短扫描概念。Noo 等^[3]利用平行束成像原理通过扇束校正数据, 推导出扇束超短扫描精确重建公式。随后, 在其基础上, 广泛地研究三维螺旋 CT 重建算法。目前主要研究方向是在小波局部重建方面^[4]以及 3D 锥束 CT 领域局部重建^[5-8]。

就重建算法而言, 主要包括解析算法和迭代算法^[8], 其中解析算法又分为近似算法和精确算法。精确算法的数学表达复杂且计算量大, 在实际应用中有很大困难。而近似算法理论结构简单, 重建速度更快且内存资源占有较少, 其中最著名的就是 FDK (Feldkamp-Daivs-Kress) 算法^[9-10]。但实际重建中计算量仍然很大, 为了更好地满足实际需要, 有必要提高重建效率。

关于加快 CT 图像重建方面的方法很多, 主要分为两类^[11-14]: ① 通过算法本身的改进来提高重建速度, 但会引入新的图像重建误差; ② 从提高硬件设备方面着手, 虽然不会带来新的重建误差, 但对硬件的要求较高, 且费用昂贵。

文中由 Yu 等^[5]提出的 Feldkamp-type-VOI 锥束 CT 重建算法, 是在 Noo 等^[3]提出的扇束重建算法的基础上发展起来的, 与 Feldkamp 算法思想相似的一种近似算法, 由投影预加权、求导、滤波和反投影三步构成。

本文从重建算法运算方面入手, 在螺旋锥束扫描方式下, 利用坐标的对称性减少反投

收稿日期: 2010-09-06。

基金项目: 国家自然科学基金 (60532080, 60772102)。

影过程中的计算量，实现了 CT 图像快速重建的仿真模拟。通过实验表明：重建速率提高了，且改进前后的算法重建断层图像质量基本相当。

1 Feldkamp-type-VOI 锥束 CT 重建算法

如图 1 所示，射线源沿半径 R 的螺旋轨迹移动：

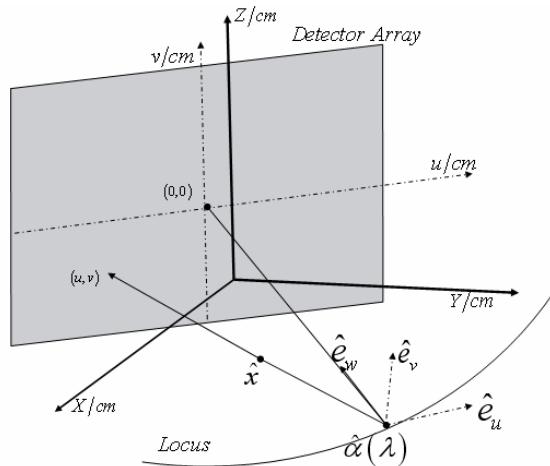


图 1 锥形束 CT 扫描几何结构示意图

Fig. 1 The illustration of cone-beam CT scanning geometry

$$C = \left\{ y \in R^3; y_1 = R \cos(\lambda), y_2 = R \sin(\lambda), y_3 = \frac{\lambda h}{2\pi}, \lambda \in R \right\}$$

并定义空间中运动坐标系的 3 个互相垂直的基向量：

$$\vec{e}_u = (-\sin \lambda, \cos \lambda, 0)^T, \quad \vec{e}_v = (0, 0, 1)^T, \quad \vec{e}_w = (\cos \lambda, \sin \lambda, 0)^T$$

其中， R 为射线源到物体中心的距离，即旋转半径， h 为螺距， D 为点源到探测器的距离， \hat{x} 为物体上的任意一点， $\hat{\alpha}(\lambda)$ 表示射线源， (u, v) 表示纵轴平行于 (x, y) 平面的探测器坐标系统， $g(\lambda, u, v)$ 表示 λ 角度下点 \hat{x} 在探测器上的投影数据。下面引入本文重建算法的主要步骤^[7]：

1) 对投影数据进行预加权（即锥束投影数据转换成扇束投影数据）

$$g_c(\lambda, u, v) = \frac{(D^2 + u^2)^{\frac{1}{2}}}{(D^2 + u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} g(\lambda, u, v) \quad (1)$$

2) 运用超短扫描的三维重建公式计算反投影数据（投影数据的生成包含了求导和柯西

主值下的 Hilbert 滤波过程)

$$f\left(\vec{x}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} d\lambda (V \times w(\lambda, \bar{u}) g_F(\lambda, \bar{u}, \bar{v})) \quad (2)$$

其中,

$$V = \frac{(D^2 + \bar{u}^2)^{\frac{1}{2}}}{D \left\| \vec{x} - \vec{a}(\lambda) \right\|}, \quad \bar{u}\left(\lambda, \vec{x}\right) = \frac{D\left(\vec{x} - \vec{a}(\lambda)\right) \bullet \vec{e}_v}{\left(\vec{x} - \vec{a}(\lambda)\right) \bullet \vec{e}_u}, \quad \bar{v}\left(\lambda, \vec{x}\right) = \frac{D\left(\vec{x} - \vec{a}(\lambda)\right) \bullet \vec{e}_w}{\left(\vec{x} - \vec{a}(\lambda)\right) \bullet \vec{e}_u}$$

表示点 \hat{x} 投影到探测器的坐标。

$$g_F(\lambda, \bar{u}, \bar{v}) = \int_{-u_m}^{u_m} du h_H(\bar{u} - u) \frac{D}{(D^2 + u^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial v} \right) g_c(\lambda, u, v) \quad (3)$$

式中, $h_H(u)$ 表示对生数据执行 Hilbert 变换的结果, $g_F(\lambda, \bar{u}, \bar{v})$ 表示求导、滤波后的数据, $w(\lambda, \bar{u})$ 是一加权函数, 用于消除校正过程中的数据冗余。 $w(\lambda, \bar{u})$ 的选取见文献[6]。根据导数的相关计算得:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = D + \frac{u^2}{D}, \quad \frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{uv}{D}.$$

2 基于对称性优化算法

从上述算法可看出, 反投影部分的计算量最大, 减少反投影计算量是很必要的。通过算法的具体计算公式可知: 在锥束 CT 扫描方式下, 通过三角函数的性质和坐标的对称性^{[15]-[16]}可以减少反投影部分的计算量。

假设在 NUM 个投影角度采样, 重建的图像大小为 $N \times N \times N$, 则需要 4 层循环, 其计算复杂度为 $O(N^4)$ 。由三角函数的性质和坐标的对称性, 我们不难得到式(4)、(5)和(6):

$$\begin{aligned} \bar{u}(\lambda, x, y) &= \bar{u}(\pi/2 + \lambda, -y, x) = \bar{u}(\pi + \lambda, -x, -y) = \\ \bar{u}(3\pi/2 + \lambda, y, -x) &= -\bar{u}(\pi/2 - \lambda, y, x) = -\bar{u}(\pi - \lambda, -x, y) = \\ &- \bar{u}(3\pi/2 - \lambda, -y, -x) = -\bar{u}(2\pi - \lambda, x, -y) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\bar{v}(\lambda, x, y, z) = \bar{v}(2\pi - \lambda, x, -y) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} V(\lambda, x, y, z) &= V(\pi/2 + \lambda, -y, x) = V(\pi + \lambda, -x, -y) = \\ &V(2\pi/3 + \lambda, y, -x) = V(2\pi - \lambda, x, -y) \end{aligned} \quad (6)$$

由式(4)、(5)和(6)可知, 我们只需要计算 λ 投影角度下的 \hat{x} 在探测器上的反投影坐标 \bar{u} 、 \bar{v} 和其对应的加权因子 V , 那么 $\pi/2 + s$ 下的 $(-y, x)$ 、 $\pi + s$ 下的 $(-x, -y)$ 、 $3\pi/2 + s$ 下的 $(y, -x)$ 、 $\pi/2 - s$ 下的 (y, x) 和 $\pi - s$ 下的 $(-x, y)$ 等的反投影坐标 \bar{u} 、 \bar{v} 和其对应的加权因子 V 就很容易确定。这就表明我们只需计算一次 \bar{u} 、 \bar{v} 和 V 就可以同时确定它们对应的反投影 8 幅投影, 也就是说我们反投影计算只在 $s \in [0, \pi/4]$ 内进行就可以了。

在算法的实际运行中, 我们将投影角的正、余弦计算放在第二层循环之前, λ 和 V 的计算则放在在第四层循环之前, 以减少算法运算过程中计算的循环次数。

算法的反投影过程总的计算量大约为: 乘法运算 $(8N^2 + 5N^3) \times NUM / 8$ 次, 加法运算 $(5N^2 + 4N^3) \times NUM / 8$ 次和三角函数运算 $NUM / 8$ 次。这表明优化后的反投影重建速度明显提高了。

3 图像重建实验结果

采用 Visual C++6.0 作为开发平台, 测试计算机配置为酷睿 2 双核 2.0 GHz 处理器、2 GB 内存。为了验证提出方法的有效性, 用本文的对称性优化算法(算法采用线性插值)对 Shepp–Logan 头模型进行图像重建。模拟条件如下: 射线源到旋转中心的距离 D 为 75 cm, 螺距 h 为 25 cm; 图像重建实验采用 1 080 幅大小分别为 128×128 和 256×256 的 Shepp–Logan 头模型原始投影数据, 旋转间隔 1° , 探元大小为 0.391 cm; 重构图像尺寸大小分别为 $128 \times 128 \times 128$ 和 $256 \times 256 \times 256$ 。

为了检测优化后算法重建的图像质量, 实验中我们选取了螺旋锥形束中心平面 ($z = 0$) 的切片来进行检测, 图 2 表示各中心切片的重建图像, 图 2(a) 和图 2(b) 为优化前后重构图像尺寸 $128 \times 128 \times 128$ 的 $z = 64$ 处的中心切片, 图 2(c) 和图 2(d) 为优化前后重构图像尺寸为 $256 \times 256 \times 256$ 的 $z = 128$ 处的中心切片。

表 1 给出了 Feldkamp-type-VOI 锥束 CT 重建算法和优化改进后算法的计算性能结果对比。表中分别列出了重建图像尺寸为 $128 \times 128 \times 128$ 和 $256 \times 256 \times 256$ 相应的重建时间和运用相对误差 d 、绝对误差 r 来分析重建断层图像的质量。

表 1 重建的时间比较和误差分析
Table 1 The time comparison and error analysis of reconstruction results

图像大小	重建算法	重建时间 t/s	相对误差 d	绝对误差 r
128^3	VOI 算法	31	1.0780	0.9853
	改进的 VOI 算法	13	1.0773	0.9848
256^3	VOI 算法	258	1.0958	0.9900
	改进的 VOI 算法	60	1.0956	0.9988

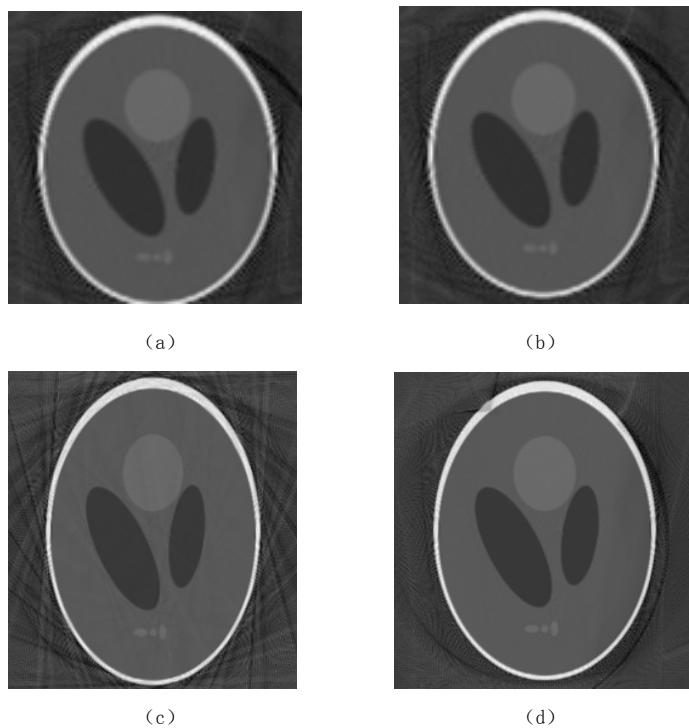


图 2 模拟实验重建结果对比图

Fig. 1 The comparison of the numerical reconstruction results

从表 1 中的数据可看出,本文提出的优化方法优化效果是明显的,与未经优化的重建算法相比,重建运行时间可减少 3 倍以上,以及采样数不同,优化速度不同。因投影角位于循环最外层,而重建点位于内层,所以每次投影采样点数越多,优化效果越明显。

由于投影数据是离散的,在实际的重建算法应用中需要对数据进行差值和求导,所以导致图像质量出现误差。从图 1 中的重建断层图像和表 1 中误差数值的大小可以看出改进前后的算法重建断层图像质量基本相当。

4 结论

综上所述,本文将锥束扫描模式存在的对称性应用于 Feldkamp-type-VOI 锥束 CT 重建算法加速的改进中,不仅继承了经典 FDK 算法图像质量良好,重建速度快等优点,同时又将 Feldkamp-type-VOI 锥束 CT 重建速度最大提高了 23.2%,且优化前后的算法重建断层图像质量基本相当。表明本文中的优化方法是正确有效的。当然,提高算法重建速度和图像质量的方法还有很多,比如投影驱动法、插值优化法等等,我们将继续致力于这方面的研究,以求获得更好的算法优化方法。

参考文献

- [1] Parker DL. Optimal short scan convolution reconstruction for fan beam CT[J]. Med Phys, 1982, 9(2): 254-257.

- [2] Kudo H, Noo F, Defrise M, et al. New super short scan algorithm for fan beam and cone beam reconstruction[C]//Conference Record of the 2002 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference, Norfork, VA: IEEE, 2002, 2: 126–131.
- [3] Noo F, Defrise M, Clackdoyle R, et al. Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short scan[J]. *Phys Med Biol*, 2002, 47: 2525–2546.
- [4] Katsevich A. Theoretically exact FBP-type inversion algorithm for spiral CT[J]. *SIAM J ApplMath*, 2002, 62(6): 2012–2026.
- [5] Yu HY, Wang G. Feldkamp-type VOI reconstruction from super short scan cone beam data[J]. *Med Phys*, 2004, 31(6): 1357–1362.
- [6] Kudo H, Noo F, Defrise M. Cone-beam filtered-backprojection algorithm for truncated data[J]. *Phys Med Biol*, 1998, 43: 2885–2909.
- [7] Wiegert J, Bertram M, Wulff J, et al. 3D ROI imaging for cone-beam computed tomography[J]. *International Congress Series*, 2004, 7–12.
- [8] 黄静, 马建华, 陈凌剑, 等. 基于 FDK 框架的锥形束 Pseudo-LT 优质重建[J]. 南方医科大学学报, 2009, 29(10): 2094–2098.
- Huang J, Ma JH, Chen LJ, et al. Cone-beam pseudo lambda tomography under FDK framework[J]. *Southern Medical University*, 2009, 29(10): 2094–2098.
- [9] 庄天戈. CT 原理与算法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1992: 63–76.
- Zhuang TG. The principal and algorithm of computed tomography[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1992: 63–76.
- [10] 薛震, 张斌, 潘晋孝. FDK 算法中一种新的插值方法的研究[J]. CT 理论与应用研究, 2008, 13(3): 1–6.
- Xue Z, Zhang B, Pan JX. A new interpolation method in the FDK algorithm[J]. *CT Theory and Applications*, 2008, 13(3): 1–6.
- [11] 邓靖飞, 李建新, 李磊, 等. 基于 FPGA 的 CT 重建加速技术综述[J]. CT 理论与应用研究, 2010, 19(2): 25–33.
- Deng JF, Li JX, Li L, et al. Review of accelerated CT reconstruction based on FPGA[J]. *CT Theory and Applications*, 2010, 19(2): 25–33.
- [12] Basu S, Bresler Y. $O(N^3 \log N)$ backprojection algorithm for the 3-D Radon transform[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2002, 21(2): 76–88.
- [13] Kudo H, Noo F, Defrise M, et al. New super short scan algorithms for fan-beam and cone-beam reconstruction[J]. *IEEE*, 2003: 902–906.
- [14] 马建华, 颜刚, 陈凌剑, 等. 扇形束 CT 超短扫描优质重建算法研究[M]. 中国生物医学工程学报, 2008, 27(3): 347–352.
- Ma JH, Yan G, Chen LJ, et al. An improved super-short-scan reconstruction algorithm for fan-beam computed tomography[M]. *Chinese Journal of Biomedical Engineering*, 2008, 27(3): 347–352.
- [15] 惠苗, 潘晋孝. 锥束/多层螺旋 CT 重建算法在工业 CT 中的应用及对运算速度的研究[J]. 中国体视学与图像分析, 2006, 11(3): 163–167.
- Hui M, Pan JX. The application of the reconstruction algorithm for cone-beam/multi-helical CT in ICT and the research of operation speed[J]. *Chinese Journal of Stereology and Image Analysis*, 2006, 11(3): 163–167.
- [16] 吴胜利, 潘瑞谊, 文斌. 锥束 CT 图像重建算法的快速实现[J]. CT 理论与应用研究, 2007, 16(4): 31–37.
- Wu SL, Pan RY, Wen B. Fast accomplishment of reconstruction algorithm for cone beam CT[J]. *CT Theory and Applications*, 2007, 16(4): 31–37.

The Research of Reconstruction Speed for the Feldkamp-type-VOI Algorithm

SHI Ying-qin, PAN Jin-xiao[✉]

(Department of Mathematic, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: The paper specifically describes a Feldkamp-type algorithm for the reconstruction of a volume of interest (VOI) from cone-beam (CB) projections. First, we analyze the traits of the reconstruction algorithm, and at the same time, proposes the optimization method by use of symmetry properties in the mode of cone beam scan. Finally, our proposed algorithm is tested using the three-dimensional Shepp–Logan phantom. The experimental results show that the optimization method can efficiently accelerate the speed of image reconstruction and doesn't affect image quality.

Key words: helical cone-beam CT; Feldkamp-type algorithm; volume of interest (VOI); image reconstruction

作者简介: 史颖琴 (1985—), 女, 2004 年获得中北大学学士学位, 目前为中北大学应用数学专业硕士研究生, 主要研究领域为 CT 重建算法, Tel: 0351-3945485, E-mail: shiyingqin@163.com; 潘晋孝[✉] (1966—), 男, 2004~2006 年北京大学应用数学专业博士后流动站博士后, 目前为中北大学数学系教授、主要从事用矩阵理论、随机过程、小波理论、现代优化计算方法、泛函分析等数学的理论和方法, 研究图像信息处理及增强, Tel: 0351-3923300, E-mail: panjx@nuc.edu.cn。