

李毅, 潘晋孝. 一种基于数据外插改进的 ART 迭代算法[J]. CT 理论与应用研究, 2011, 20(1): 21-27.
Li Y, Pan JX. Base on date extrapolation improve ART iterations algorithm[J]. CT Theory and Applications, 2011, 20(1): 21-27.

一种基于数据外插改进的 ART 迭代算法

李毅, 潘晋孝[✉]

(中北大学理学院数学系, 太原 030051)

摘要: 本文针对有限角度的投影数据的 CT 图像重建问题, 提出了一种基于数据外插改进的 ART 算法。该算法的基本思想是运用已知角度的投影数据来补全未知角度的投影数据, 再用 ART 算法进行图像重建。最后用模拟的投影数据进行了重建图像的数值实验。实验结果表明该算法不但提高了重建图像质量, 同时也提高了图像迭代的收敛速度。

关键词: 有限角度; 不完全投影数据; 图像重建; 迭代算法

文章编号: 1004-4140 (2011) 01-0021-07 **中图分类号:** 0 242 **文献标识码:** A

有限角 CT 图像重建在医学、工业检测等领域都有着实际的应用背景, 如医学中需要通过减少投影数据来降低辐射剂量; 工业检测中需要通过减少投影数据来提高检测效率^[1-2]。有限角度图像重建的问题属于不完全投影数据图像重建的范畴, 如果对扫描角度小于 180° 的投影数据进行重建, 那么这就是有限角度重建^[3]。在数学上, 有限角度 CT 图像重建通常被认为是欠定性问题。直接用解析重建算法对有限角度的投影数据进行图像重建, 往往得不到理想的图像; 而在迭代算法中, 代数重建法 (ART) 是最具代表性的, 由 Gorden 等提出的, 该算法是将一个投影值看成一个方程, 这样的话, 问题就转化成求解方程组的问题, 从而对投影数据完整性的要求就降低了, 因此适合于有限角图像重建^[5]。

但不能说 ART 算法没有缺点, 它最大的缺点是重建时间长, 用硬件来实现时存在很大困难, 这将导致应用到工业领域中的局限性。因此缩短 ART 算法的重建时间成了众多学者近年来深入研究的一个重要方面, 另外, 对重建图像质量的改进也成了另一个重要方面^[6]。孔慧华^[7]通过选择投影数据的访问顺序和选择合适的松弛因子来提高图像重建质量, 但这些适合于精确图像重建, 而对于有限角图像重建, 效果并不理想。本文首先对 ART 算法及其原理进行了介绍, 然后针对有限角度重建的图像质量差以及重建时间长的问题, 提出了一种改进的 ART 算法, 最后通过数值仿真实验验证了本文方法在图像质量和重建速度方面的有效性。

1 ART 算法原理简介

迭代重建算法与解析重建算法的最大区别在于迭代重建算法一开始就得把连续的图像 $f(x, y)$ 离散化。而 ART 算法是迭代重建算法中的一种算法, 因此, 首先将连续的图像 $f(x, y)$

收稿日期: 2010-09-06。

基金项目: 国家自然科学基金 (60532080, 60772102)。

离散化，即将待重建的未知图像 $f(x, y)$ 离散成一个 $n \times n = N$ 的重建图像网格，这样也就把整个图像区域划分为 $n \times n = N$ 个有限像素。再根据成像的物理过程和相应的数学模型^[8]，重建图像和投影数据之间的关系，建立代数方程组，从而把图像重建问题转化为解线性方程组的问题^[9]，如下式：

$$p_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} f_j \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

其中， p_i 表示第 i 条射线的投影值， f_j 表示第 j 个像素（网格）内的常数值， w_{ij} 为权因子， M 为射线总数。由于 M 和 N 在实际情况中的值都很大，所以很难用一般的矩阵理论来求解方程组，而通常是采用迭代法，其迭代公式如下：

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \lambda \frac{p_i - \sum_{n=1}^N w_{in} f_n^{(k)}}{\sum_{n=1}^N w_{in}^2} \quad (2)$$

式中， k 为迭代次数， λ 为松弛因子，一般取 $0 < \lambda < 2$ 。ART 算法的具体步骤^[10]如下：

1) 给未知量 f_j 定义初值：

$$f_j = f_j^{(0)} \quad (j = 1, 2, \dots, J) \quad (3)$$

2) 计算第 i 个方程的估计值：

$$p_i^* = \sum_{j=1}^J w_{ij} f_j^{(0)} \quad (4)$$

3) 计算误差：

$$\Delta_i = p_i - p_i^* \quad (5)$$

4) 计算第 i 个方程的修正值：

$$C_{ij} = \Delta_i \frac{r_{ij}}{\sum_j (r_{ij})^2} \quad (6)$$

5) 对 f_j 的值进行修正:

$$f_j = f_j^{(0)} + C_{ij} \quad (7)$$

这里只对该条射线所穿过的像素进行修正, 其他像素 $r_{ij} = 0$, 因而 $C_{ij} = 0$, 所以其值保持不变。

6) 将前面修正好的 f_j 代入下一个方程, 重复步骤 (2) 到 (5), 如此循环直到做完第 I 个方程, 就完成了第一轮迭代。

7) 以上一轮迭代的结果作为初值, 重复 (2) 到 (5) 可得第 K 轮结果, 从而得到一个序列 $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(K)}$, 若符合收敛要求, 即对事先给定的很小的正数 ε 存在正整数 K , 使得当 $k > K$ 时, 有 $|f_j^{(k)} - f_j^{(k-1)}| < \varepsilon$, $j = 1, 2, \dots, J$ 。

2 基于数据外插改进的 ART 算法

有限角度的投影数据属于不完全投影数据，而我们知道投影数据的完整性直接影响着重建图像的质量。针对此问题，本文对 ART 算法进行了改进，运用了 GP 算法^[11-12]的主要思想，对有限角度投影数据中的未知角度投影数据进行了补全。GP 算法的主要思想是运用已知角度的投影数据重建图像，再用重建的图像对未知的投影数据进行补全。

下面介绍一下 GP 算法的迭代过程 (用算子形式表示):

$$f^{(n+1)} = Tf^{(n)} + f_1 \quad (8)$$

其中, $T f$ 表示作用于图像 f 的线性积分算子, f_i 表示初始图像。在不完全投影数据的图像重建问题中, 可用图 1 概括 GP 算法^[13]。

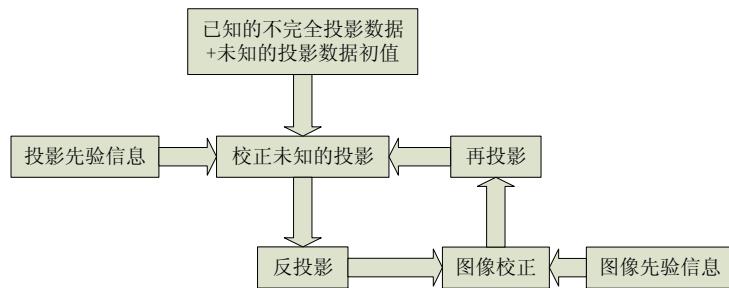


图 1 不完全投影数据图像重建 GP 算法框图

Fig. 1 The block diagram of incomplete data image projection of the GP algorithm

由于 ART 算法的迭代过程是压缩映射过程, 那么基于数据外插改进的 ART 算法的迭代过程也是压缩映射过程。这样看来, 新算法的迭代过程符合 GP 算法的迭代过程。新算法的具体步骤如下:

1) 定义未知投影数据的初始值 $x^{(0)}$, 运用 ART 算法得到一幅初始图像 $f^{(0)}$;

2) 运用 ART 算法的反投影, 即:

$$x_i^{(1)} = \sum_{j=1}^J w_{ij} f_j^{(0)} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (9)$$

可以得到第一次补全后的投影数据 $x^{(1)}$, 对 $x^{(0)}$ 进行修正;

3) 用修正后的投影数据 $x^{(1)}$ 进行 ART 算法重建, 得到图像 $f^{(1)}$;

4) 对图像 $f^{(1)}$ 进行非负约束, 即,

$$\hat{f}_j^{(1)} = \begin{cases} f_j^{(1)}, & f_j^{(1)} \geq 0 \\ 0, & f_j^{(1)} < 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (10)$$

5) 将以上一轮迭代的结果作为初值, 重复过程 (2) 到过程 (3), 可以得第 K 轮结果, 从而得到一个序列 $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(K)}$, 若符合收敛要求, 即对事先给定的很小的正数 ε 存在正整数 K , 使得当 $k > K$ 时, 有 $|f_j^{(k)} - f_j^{(k-1)}| < \varepsilon$, ($j = 1, 2, \dots, J$)。

值得注意的是, 对步骤 (1), 初始图像 $f^{(0)}$ 的选取在算法的实际运行中是相当重要的, 初始图像 $f^{(0)}$ 选择的合理, 能使迭代结果 $x^{(K)}$ 很快收敛于真值, 这方面还有待研究。

3 实验结果及分析

本文算法是针对有限角图像重建的, 而有限角图像重建往往会出现如下情况是: 被检测对象在某些角度比较狭长, 无法通过这些角度进行扫描, 造成了这些角度投影数据的缺失。据此, 本文的数值仿真实验以 Shepp-Logan 头模型作为重建对象, 重建图像为 256×256 , 在 $0 \sim 110^\circ$ 范围内每隔 1° 均匀采样, 获取有限角度的投影数据。给投影数据加入 0.0005 的随机噪声, 每个投影角下的射束为 256, 初始值取 0, 松弛因子 $\lambda = 0.5$, 成像几何方式为扇束。经过多次实验, 可以发现初始图像的选择影响着图像的收敛速度, 本文选择 ART 算法迭代 10 次的图像作为初始图像, 同时本文实验只对不完全投影数据进行一次补全, 相对提高了速度。

为了客观地评价重建质量, 采用归一化均方距离判据 d , 归一化平均绝对距离判据 r 和最坏情况距离判据 e , 这三个评价指标^[14]对重建图像进行量化比较。需要指出, 这三个评价方法是针对不同类型的图像误差, 所以它们的敏感程度是不同的。其中, d 指的是少数点所产生的比较大的误差, r 指的是对大多数点均有的一些小误差, 而 e 则反映的是原始图像与重建图像之间的最大密度偏差。显然, 这三个指标的数值的大小反映着图像质量的好坏。如果它们的数值越小, 那么表明重建图像与原始图像就越接近, 也就是说重建图像的质量越好; 相反, 如果它们的数值越大, 那么表明重建图像与原始图像就越疏远, 也就是说重建图像的质量越差。

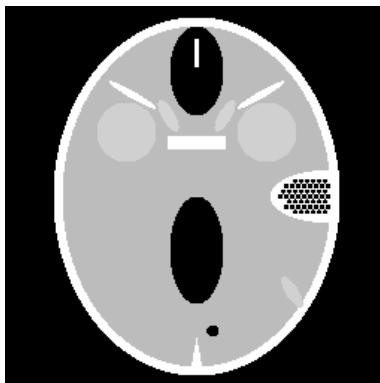


图 2 原始图像
Fig. 2 The original image

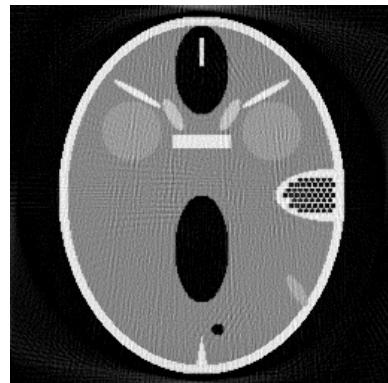


图 3 本文算法重建图像 (迭代 20 次)
Fig. 3 The reconstruction image by using this paper's algorithm

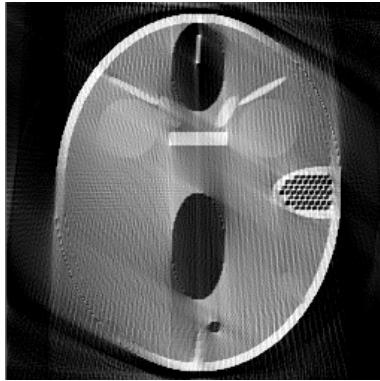


图 4 ART 算法重建图像 (迭代 20 次)
Fig. 4 The reconstruction image by using ART algorithm

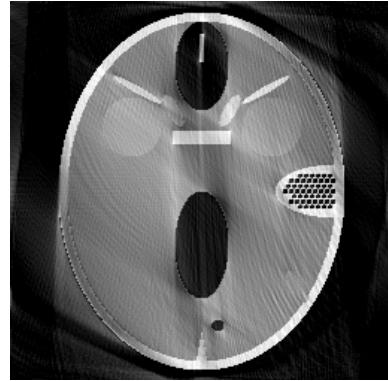


图 5 GP 算法重建图像
Fig. 5 The reconstruction image by using GP algorithm

表 1 仿真重建算法性能分析
Table 1 The performance analysis of the simulation results

重建算法	迭代次数	d	r	e	迭代时间/s
本文算法	20	0.220143	0.150312	0.171469	121
ART 算法	20	0.342065	0.283979	0.293765	197
GP 算法	20	0.286034	0.216147	0.202638	158

由图 3、图 4 和图 5 可以看出, 由于投影数据的缺失, ART 算法所重建图像的部分边缘不清晰, 对比度低, 平滑性较差, 伪影较多, 而 GP 算法所重建的图像很好地控制了边缘, 但图像的伪影仍较多, 本文算法所重建的图像较前两种算法所重建图像就清晰得多, 更好地控制了图像边缘, 对比度较高, 图像的灰度变化也较平缓。

表 1 中的比较都是针对图 2 进行的, 从表 1 中, 我们可以看出在相同的迭代次数下,

本文提出的算法比 ART 算法和 GP 算法在减小误差方面有了明显的改善。同时, 通过比较可以看出, 本文所提出的改进算法具有如下优点: ①本文算法能够更好地抑制图像的噪声和边缘伪影, 同时图像的对比度较高; ②在迭代次数相同的情况下, 所得到的结果较其他算法好; ③在迭代次数相同的情况下, 本文算法的收敛速度快。

4 结论

综上所述, 本文针对有限角度重建图像的问题, 提出了基于数据外插改进的 ART 算法。该算法运用了 GP 算法的主要思想, 对有限角度的投影数据中的未知角度投影数据进行了补全, 同时, 相对地提高了重建速度。仿真实验结果表明: 本文算法对于有限角度的投影数据重建可以得到高质量的图像。但在角度的缺失范围以及初始图像的选择等方面, 还有待进一步的研究。

参考文献

- [1] 全渝娟, 李时光. 不完全投影数据的最大熵再投影图像重建[J]. 重庆大学学报, 1998, 21(1): 77-81.
Quan YJ, Li SG. Image reconstruction from incomplete data by a maximum entropy reprojecting technique[J]. Journal of Chongqing University, 1998, 21(1): 77-81.
- [2] 吕红, 李时光, 徐向之, 等. 不完全扇形投影数据的图像重建算法研究[J]. 重庆大学学报: 自然科学版, 1997, 5: 41-46.
Lu H, Li SG, Xu WZ, et al. Image reconstruction from incomplete fan beam projection data by maximum entropy and iterative technique[J]. Journal of Chongqing University: Natural Science Edition, 1997, 5: 41-46.
- [3] 王浩, 卢孝强, 孙怡. 基于改进正则化方法的有限角度 CT 图像重建算法[J]. CT 理论与应用研究, 2008, 17(4): 15-22.
Wang H, Lu XQ, Sun Y. CT reconstruction algorithm from limited-angle using modified regularization method[J]. CT Theory and Applications, 2008, 17(4): 15-22.
- [4] Gorden R, Bender R, Herman G T. Algebraic reconstruction techniques for three-dimensional electron microscopy and X-ray photograph[J]. Journal of Theoretical Biology, 1970, 29(5): 471-481.
- [5] Verman G. Image reconstruction from projections: The fundamentals of computerized tomography[M]. New York: Academic Press, 1980.
- [6] 张顺利, 张定华, 熬波, 等. 不完全投影数据图像重建的 ART 算法研究[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(10): 8-10.
Zhang SL, Zhang DH, Ao B, et al. Research of image reconstruction from incomplete projection data on ART[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(10): 8-10.
- [7] 孔慧华. 加速图像重建的迭代算法研究[D]. 太原: 中北大学, 2004.
Kong HH. The research of iterations algorithm in increasing speed[D]. Taiyuan: North University of China, 2004.
- [8] 张顺利, 王建武, 刘清. 基于代数重建法的计算机断层成像[J]. 咸阳师范学院学报, 2004, 19(4): 32-37.
Zhang SL, Wang JW, Liu Q. Computed tomography based on algebraic reconstruction technique[J]. Journal of Xianyang Teachers's College, 2004, 19(4): 32-37.

- [9] 张顺利, 李山, 张定华, 等. 中国计算机图形学进展 2004[C]. 西安: 西北工业大学出版社, 2004.
Zhang SL, Li S, Zhang DH, et al. The 2004 of Chinese computer graphics progress[C]. Xian: Northwestern Poly Technical University, 2004.
- [10] 刘春华. 三维投影矩阵的刻画及迭代重建的加速研究[D]. 太原: 中北大学, 2008.
Liu CH. The figure of 3D projection matrix and the research of increasing speed in iterations algorithm[D]. Taiyuan: North University of China, 2008.
- [11] Qu GR, Lan YS, Jiang M. An iterative algorithm for angle-limited three-dimensional image reconstruction[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series, 2008, 24(1): 157-166.
- [12] Qu GR, Jing M. Landweber iterative methods for angle-limited image reconstruction[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series, 2009, 25(2): 327-334.
- [13] 张兆田, 张朋. 改进的图像重建迭代算法[J]. 电子与信息学报, 2004, 26(10): 1626-1630.
Zhang ZT, Zhang P. An algorithm for improved iterative image reconstruction[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2004, 26(10): 1626-1630.
- [14] 庄天戈. CT原理与算法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1992: 11.
Zhuang TG. Principle and algorithm of CT[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1992: 11.

Base on Date Extrapolation Improve ART Iterations Algorithm

LI Yi, PAN Jin-xiao[✉]

(Department of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: In order to reconstruct high-quality image from projection data at limited angle, we develop an improved fast iterative reconstruction algorithm. The basic idea of this algorithm is that used the perspective of data to complete unknown perspective projection data is applied, and the image can be made by Algebraic Reconstruction Technique (ART). In the end, we have performed numerical experiments using computer simulation data. Experimental results demonstrate that the proposed algorithm not only improves the quality of image reconstructed, but also significantly increases the convergence speed of iteration image.

Key words: limited angle; incomplete projection data; image reconstruction; iterative algorithm

作者简介: 李毅 (1985—), 女, 2004 年获得中北大学学士学位, 目前为中北大学应用数学专业硕士研究生, 主要从事工业 CT 图像重建算法研究, Tel: 13503506581, E-mail: liyiwss1117@163.com; 潘晋孝[✉] (1966—), 男, 2004~2006 年北京大学应用数学专业博士后流动站博士后, 目前为中北大学数学系教授、博士生导师, 主要从事用矩阵理论、随机过程、小波理论、现代优化计算方法、泛函分析等数学的理论和方法, 研究图像信息处理及增强, Tel: 0351-3923300, E-mail: panjx@nuc.edu.cn。