

石本义, 王成, 陈四海, 等. CT 断层重建中滤波函数设计的新方法[J]. CT 理论与应用研究, 2010, 19(4): 35-43.
Shi BY, Wang C, Chen SH, et al. A novel method of CT reconstruction filter function design[J]. CT Theory and Applications, 2010, 19(4): 35-43.

CT 断层重建中滤波函数设计的新方法

石本义^{1,2}, 王成², 陈四海¹, 毕昆²✉

1. 华中科技大学光电子科学与工程学院, 武汉 430074
2. 北京农业信息技术研究中心, 北京 100097

摘要: 滤波函数在 CT 图像重建过程中起着非常重要的作用, 直接关系到重建图像质量。为了提高 CT 重建图像质量, 本文从加权平均的思想出发, 根据 FBP 重建算法的理论基础, 提出一种设计滤波函数的新思路, 并分析了五点加权平均滤波函数性能比较。最后针对 Shepp-Logan 模型数据和实际的海螺投影数据, 设计出一种新的滤波函数并与 S-L 和 R-L 滤波函数的重建效果进行了比较。从比较结果可以看出, 新设计的滤波函数重建的图像效果在整体性能上最好, 在局部地方, 其密度分辨率有所提高。本文为滤波函数的设计提出了一种新的想法和思路。

关键词: 滤波函数; CT 图像重建; FBP; 加权平均

文章编号: 1004-4140 (2010) 04-0035-09 **中图分类号:** TP 391.41 **文献标识码:** A

FBP 是一种 CT 图像重建的非常经典的方法, 由于其计算量小, 图像重建速度快, 该方法已经广泛应用与工业 CT 图像重建的各个领域。滤波过程作为 FBP 方法的一个非常重要的过程, 它是 CT 图像重建质量的关键, 选择一个好的滤波函数非常重要。目前用得比较广泛的滤波函数有 1973 年 Ramachandran 等^[1]提出来的 R-L 滤波函数和 1974 年 Shepp 和 Logan 提出来的 S-L 滤波器。但目前工业 CT 对图像重建的要求各种各样, 比如有的要求局部成清晰图像, 有要求消除 Gibbs 效应, 有的要求提高图像的空间分辨率及有的要求提高图像的密度分辨率。这些要针对不同的需求, 满足不同的情况, 设计出适合的滤波器。相关研究人员在新颖的滤波函数上也做了很大的努力, 有针对射线源强度不均匀性, 射线束硬化, 散射等影响设计了新颖滤波器^[2], 有基于 SR-CT 反投影算法设计了新滤波函数^[3], 有专门针对 CT 图像局部重建的新滤波函数设计^[4], 有针对 Gibbs 现象设计了新滤波器^[5]。但是基本都没有给出一个整体设计思路和设计方向。一般的情况只是给出一个函数, 抑或给出一个该滤波函数的频域分布图和空域分布图。没有介绍针对不同问题, 不同情况时, 设计一个新滤波函数思路 and 想法, 本文介绍了这种加权思想设计的滤波器, 同时通过模拟的扫描数据和实际扫描得到的海螺的投影数据进行了图像重建。

1 FBP 重建算法

FBP 算法是目前工业 CT 用得最多的一种图像重建算法, 其理论基础是傅里叶切片定理, 设一个图像 $r(x, y)$, 则其二维傅里叶变换为 $R_0(w_1, w_2)$, 可以通过测得的不同角度投影数据的一维傅里叶变换得到。为了使图像 $r(x, y)$ 和其二维傅里叶变换 $R_0(w_1, w_2)$ 表示的一致性,

将 $R_0(w_1, w_2)$ 转用极坐标 $R(\rho, \phi)$ 表示:

$$r(x, y) = F_2^{-1}(R_0(w_1, w_2)) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(w_1, w_2) \exp(w_1 x + w_2 y) dw_1 dw_2 = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\rho, \phi) \exp(i2\pi\rho r \cos(\theta - \phi)) |\rho| d\rho d\phi \tag{1}$$

其中,

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\rho, \phi) \exp(i2\pi\rho r \cos(\theta - \phi)) |\rho| d\rho = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| P(\rho, \phi) \exp(i2\pi\rho x_r) |_{x_r=r\cos(\theta-\phi)} d\rho = h(x_r) * p(x_r, \phi) |_{x_r=r\cos(\theta-\phi)} \tag{2}$$

已知 $p(x_r, \phi) = F_1^{-1}(P(\rho, \phi))$ 。令 $h(x_r) = F_1^{-1}(|\rho|)$, 称为滤波函数。 $H(\rho) = |\rho|$ 是理想的滤波函数, 但违背了佩利—维纳准则, 不可实现, 需要对它加上一个限制性的窗函数以构成一个可实现的滤波函数。目前应用最为广泛的 R-L 和 S-L 滤波函数分别是矩形窗函数和 sinc 窗函数。

2 滤波函数的设计

滤波函数一般可以分为平滑型, 复原型和增强型。在 FBP 算法重建中, 一般都采用平滑型滤波函数, 主要原因是可由 FBP 重建算法的推导过程得知, FBP 算法重建需要有一个斜坡函数 (Ramp 函数) 来消除因反投影引起的环状伪迹^[6], 这也是引入滤波的最重要的目的。因此一个滤波函数中, Ramp 函数部分是必须要求存在的。一般而言, 一个平滑型滤波函数包括 Ramp 函数和窗函数。Ramp 函数作用是消除反投影过程中的星形伪影, 窗函数决定振幅大小和截止频率。

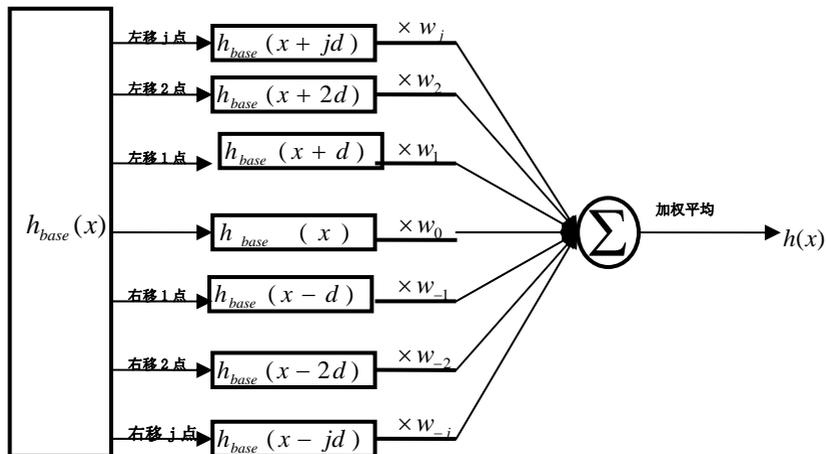


图 1 加权平均的思想框架
Fig.1 The framework of weighted average

用于 CT 图像重建的滤波函数设计主要是设计窗函数,当然也可以使用现有的窗函数。如 Hanning 窗函数、Hamming 窗函数、Blackman 窗函数、Butterworth 窗函数和 Gaussian 窗函数^[7-8]。从信号与系统的角度看,判断一个滤波函数的好坏主要有 3 个因素:主瓣、近旁瓣和远旁瓣。从空域的特性图上看,主瓣越高越窄,空间分辨率就越好。远旁瓣的幅度和幅值越小时,吉布斯效应就越小,有利于提高图像的密度分辨率^[9-10]。

下面从 R-L 滤波函数出发,利用加权平均思想来设计一个新滤波函数模型。其基本的思想是从空域滤波函数出发,利用信号系统观点,通过将邻域的几点进行加权平均,来减少旁瓣的幅度和幅值,减少主瓣的半宽度以提高图像空间分辨率和密度分辨率。空间分辨率和密度分辨率之间存在一定的制约关系,针对具体情况,选择合适的侧重点。

从理论上分析,空域中的平移,反映在频域上就是乘以一个波动因子 $e^{i2\pi k\rho/(2N-1)}$ 。当有空间邻域 $2n+1$ 点进行加权平均时,反映到频域上用下式表示:

$$H(\rho) = \sum_{k=-n}^n (-1)^k w_k |\rho| W_{R-L}(\rho) \exp\left(\frac{i2\pi k\rho}{2N-1}\right) \quad (3)$$

其中: N 是空域中采样频率; $\sum_{k=-n}^n w_k = 1$ 是归一化的表达式,这样构成了一个新的滤波函数设计模型。针对不同的实际情况,可以通过修改 w_k 来得到满足需要的滤波函数。当 $w_k = w_{-k}$ 时,上式则可以化为:

$$\begin{aligned} H(\rho) &= \sum_{k=-n}^n (-1)^k w_k |\rho| W_{R-L}(\rho) \exp\left(\frac{i2\pi k\rho}{2N-1}\right) = \\ &|\rho| W_{R-L} \left(w_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k w_k \left(\exp\left(\frac{i2\pi k\rho}{2N-1}\right) + \exp\left(\frac{-i2\pi k\rho}{2N-1}\right) \right) \right) = \\ &|\rho| W_{R-L} \left(w_0 + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k w_k \cos\left(\frac{2\pi k\rho}{2N-1}\right) \right) = |\rho| W(\rho) \end{aligned} \quad (4)$$

令 $t = \frac{2\pi\rho}{2N-1}$, 则 $\cos\left(\frac{2\pi k\rho}{2N-1}\right) = \cos(kt)$ 。 $\cos(t)$, $\cos(2t)$, \dots , $\cos(kt)$, \dots 是一组傅里叶余弦级数,任何偶函数可以用这组余弦级数来表示。在 CT 重建的过程中,窗函数应该都是偶函数,任何窗函数可以用公式 (4) 表示,所以公式 (4) 对于窗函数具有普适性。

下面考虑当 $n=2$, 5 点平均时,设计的滤波函数:

当 $w_0 = 0.5$, $w_1 = 0.25$ 时, Hanning 窗函数是:

$$W(\rho) = 0.5 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi\rho}{2N-1}\right) \right) R_N(\rho)$$

当 $w_0 = 0.54$, $w_1 = 0.23$ 时, Hamming 窗函数是:

$$W(\rho) = \left(0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi\rho}{2N-1}\right) \right) R_N(\rho)$$

当 $w_0 = 0.42, w_1 = 0.25, w_2 = 0.04$ 时, Blackman 窗函数是:

$$W(\rho) = \left(0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi\rho}{2N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi\rho}{2N-1}\right) \right) R_N(\rho)$$

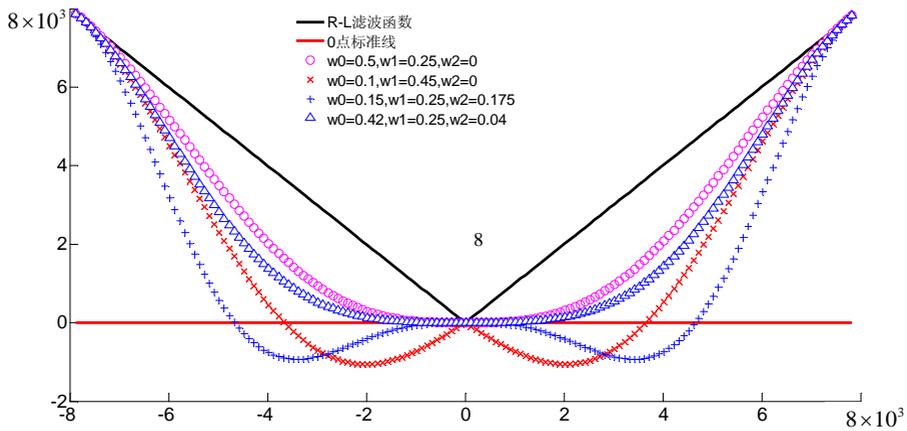


图 2 滤波函数在频域上分布

Fig. 2 The distribution of filter function in the frequency domain

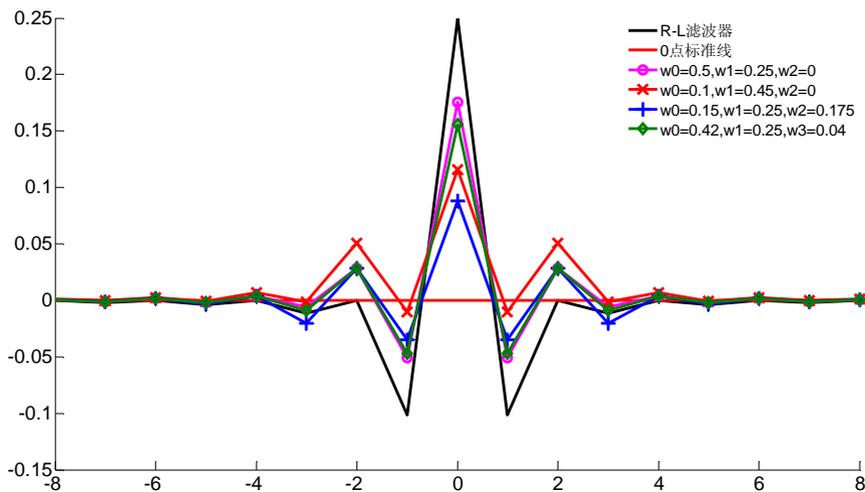


图 3 滤波函数在空域主瓣的分布

Fig. 3 The distribution of filter function in the spatial domain near the coordinate origin

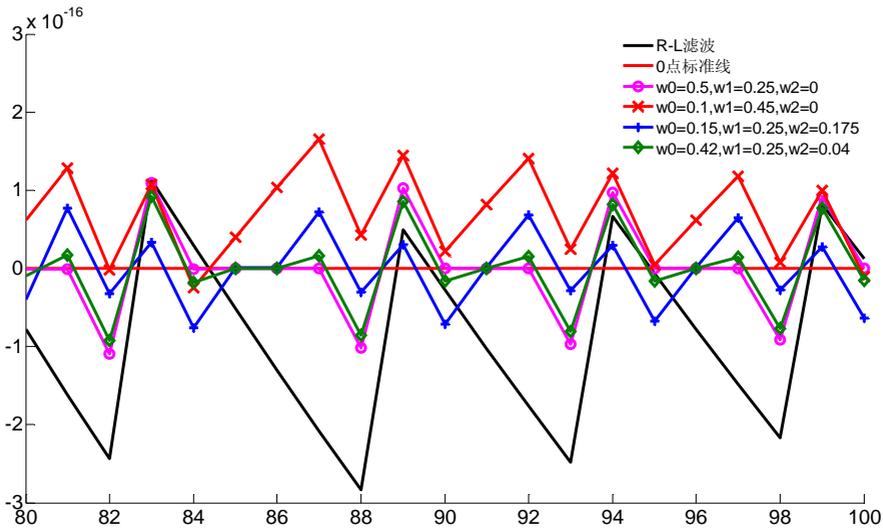


图 4 滤波函数在空域远旁瓣的分布

Fig. 4 The distribution of filter function in the spatial domain far from the coordinate origin

从图 3 可以看到，R-L 滤波器的主瓣最高最窄，说明其空间分辨率比较好，但是可以看到其旁瓣的幅度与幅宽都比较大，因此其吉布斯效应比较严重。从图 4 来看，R-L 滤波函数的远旁瓣的收敛效果不是很好，说明它的密度分辨率不是很好。在设计滤波器的时候可以从空间分辨率和密度分辨率中取一个折中。

3 模拟重建结果

在 MATLAB 环境编写了一个 CT 重建模拟程序，如图 5 所示，可以选择已有的 R-L 滤波函数和 S-L 滤波函数，同时也可以设计新的滤波器，输出的两幅图，左图是 Shepp-Logan 模型正弦图数据，右图是根据选择的滤波器重建结果图像。

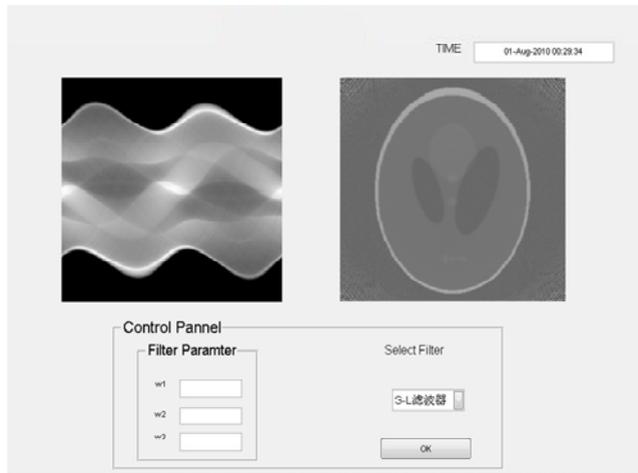
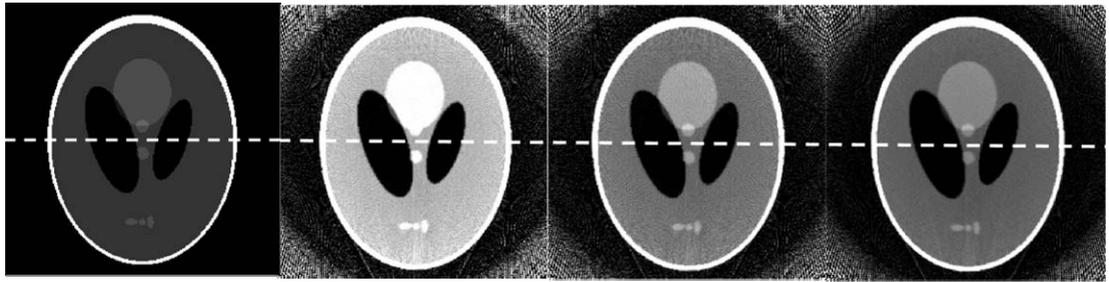


图 5 MATLAB 模拟软件界面

Fig.5 The interface of sim-CT based MATLAB

采用平均加权思想设计一个新滤波器 ($w_0 = 0.7, w_1 = 0.10, w_2 = 0.05$) 与常用的 R-L 滤波器和 S-L 滤波器针对同一模拟数据进行 CT 重建后的比较结果如图 6 所示。

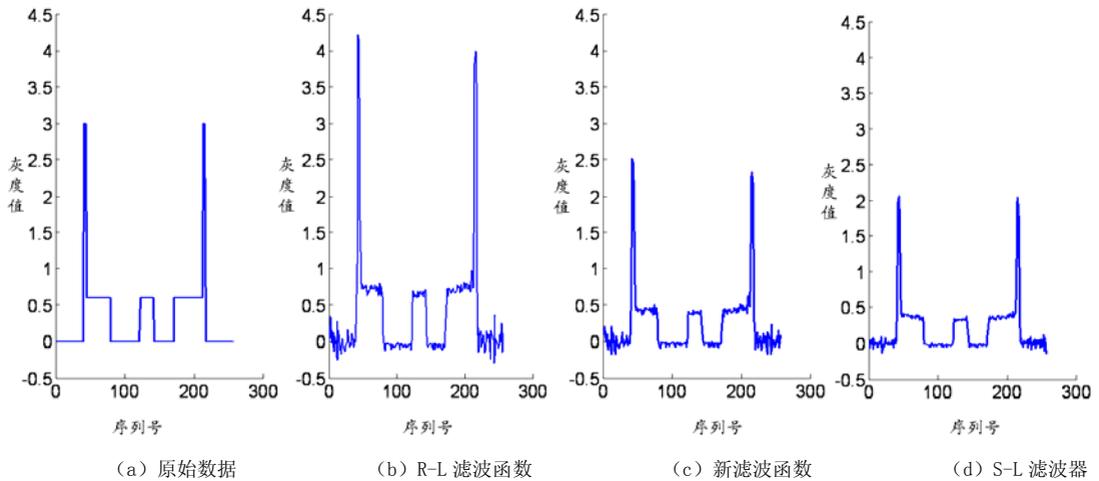
从图 6 和图 7 中可以看到 R-L 滤波器重建的图像的灰度对比度最好,但在部分位置出现过曝的现象,同时在其图像灰度噪声比较大,因此重建图像表现出不光滑的现象。S-L 滤波重建的图像最为光滑,但是其灰度的对比度有点暗。新滤波器在重建图像的光滑程度和图像灰度的对比度做了一个折中。



(a) Shepp-Logan 原始数据 (b) R-L 滤波函数重建的效果 (c) 新滤波函数重建的效果 (d) S-L 滤波器重建的效果

图 6 Shepp-Logan 模型重建效果比较

Fig.6 The comparison of Shepp-Logan model reconstruction



(a) 原始数据

(b) R-L 滤波函数

(c) 新滤波函数

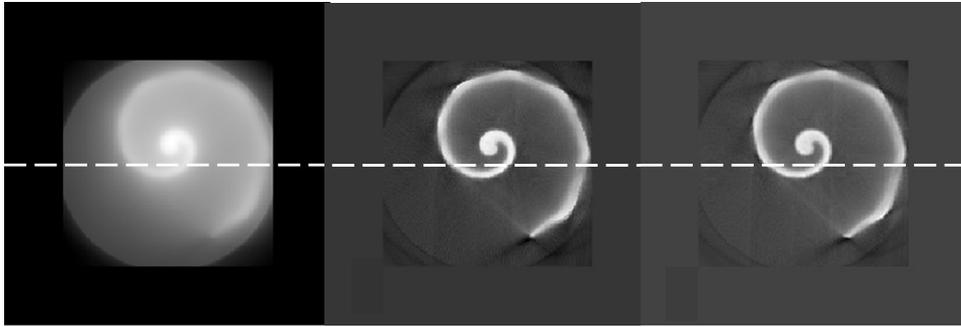
(d) S-L 滤波器

图 7 Shepp-Logan 模型重建结果中间行灰度值分布

Fig.7 The gray scale distribution of middle line of Shepp-Logan model reconstruction result

实验所采用的海螺壳在邻近部位的组成成分和密度差异非常小,对实验结果影响也非常小,可以认为是均匀物质。图 8 是实验室设计的一个微型 CT 系统对实际海螺进行扫描得到的投影数据,通过对不同的滤波函数进行的 CT 断层重建效果图比较,为了能不引入其他因素影响真实对比效果,对比都是 R-L 和 S-L 直接滤波投影重建。可以看到,针对这种情况,直接 R-L 滤波函数重建效果非常差,出现了非常严重的伪影现象,而直接 S-L 滤波函数和新设计的滤波函数重建效果比较好。图 9 比较了新滤波函数和 S-L 滤波函数重建效果

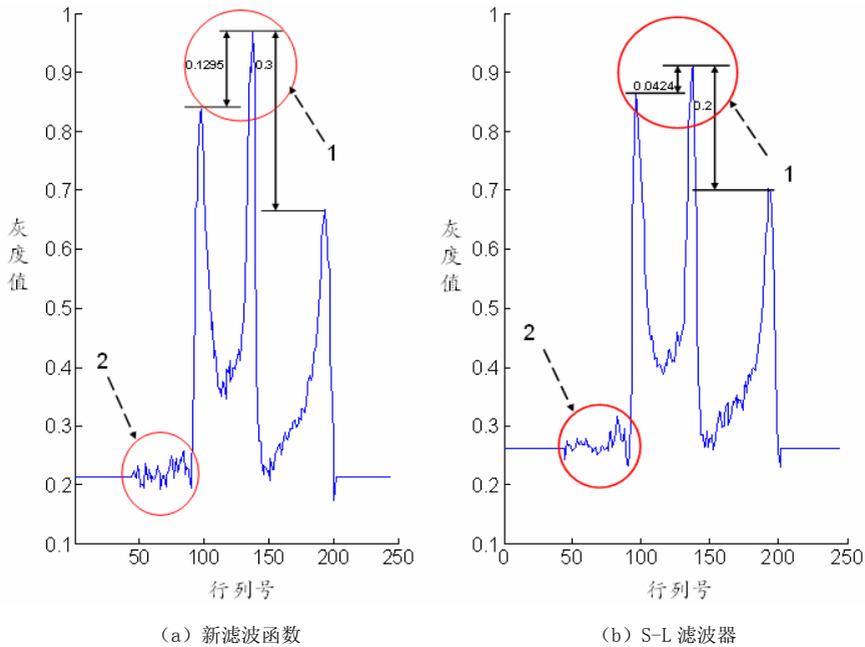
中间行的细节，从两幅图中的位置 1 看：图 9 (a) 中，灰度最大值与次级大相差为 0.1295；图 9 (b) 图中，灰度最大值与次级大相差为 0.0424。图 10 (a) 图的重建效果在密度分辨率层面上讲比图 10 (b) 的重建效果要好，图 9 (a) 局部密度分辨率是图 10 (b) 图的 3 倍。比较位置 2，两图的重建的灰度波动相差不大。按照设计思路设计处理的滤波函数兼顾了空间和密度分辨率，较 R-L 和 S-L 滤波函数重建的断层图像质量均好。



(a) 直接 R-L 滤波函数重建结果 (b) 新滤波函数重建结果 (c) 直接 S-L 滤波器重建结果

图 8 重建结果比较

Fig.8 The comparison of Conch reconstruction section



(a) 新滤波函数

(b) S-L 滤波器

图 9 不同滤波函数的滤波效果中间行像素元的比较

Fig.9 The gray scale distribution of middle line of conch reconstruction section result

4 结论

CT 图像重建过程中，滤波函数对图像重建效果起着关键作用，因此，设计滤波函数

是 CT 图像重建过程中的一个非常重要的过程。本文以信号与系统的角度为基础,借用平均加权的思想,提出 CT 图像重建的滤波函数设计的一种新思路。通过这个思路设计出新的滤波函数,对 Shepp-Logan 模拟的投影数据和实际 CT 扫描的海螺投影数据进行图像重建,比较最终的重建效果,新滤波函数的重建图像兼顾了密度分辨率和空间分辨率,整体性能比其他两种滤波函数的重建效果都要好,从而验证了这种滤波函数设计思路的实用性。

参考文献

- [1] Ramachandran GN, Lakshminarayanan AV, Kolaskara AS. Theory of the non-planar peptide unit[J]. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Protein Structure*, 1973, 303(2): 385-388.
- [2] 杨民, 路宏年, 傅健. 基于卷积反投影 CT 重建的一种新型实用滤波函数[J]. *CT 理论与应用研究*, 2000, (z1): 29-32.
Yang M, Lu HN, Fu J. A new filter function based on convolutional back-projection CT reconstruction[J]. *CT Theory and Applications*, 2000(z1): 29-32.
- [3] 许峰, 胡小方, 缪泓, 等. 基于新滤波函数的 SR-CT 反投影算法研究[C]//内蒙古工业大学. 第十二届全国实验力学学术会议摘要集, 2009: 425-428.
Xu F, Hu XF, Miu H et al. The research on algorithm of SR-CT back-projection based on a new filter function[C]//Inner Mongol University of Technology. ICF12, 2009: 425-428.
- [4] 徐茂林, 邱钧, 范惠荣, 等. 用一种新滤波函数进行 CT 图像的局部重建[J]. *CT 理论与应用研究*, 2004, 13(1): 54-58.
Xu ML, Qiu J, Fan HR, et al. The principle of local tomography with a new filter[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2004, 13(1): 54-58.
- [5] Xiang, Xue, Yan, et al. On the Gibbs phenomenon of Fourier series of a classical function[J]. *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 2008, 28(2): 347-352.
- [6] 庞彦伟, 王召巴, 林敏, 等. CT 图像环形伪迹分析[J]. *华北工学院学报*, 2001, 22(1): 16-19.
Peng YW, Wang ZB, Lin M, et al. Analysis of ring artifacts of CT images[J]. *Journal of North China Institute of Technology*, 2001, 22(1): 16-19.
- [7] 陆林中, 吴复平. SPECT 图像滤波函数的选择: Butterworth 和 Gaussian 滤波器[J]. *中华核医学杂志*. 1994, 14(3): 161-163, T11.
Lu LZ, Wu FP. The selection of SPECT image filter function: The Butterworth and Gaussian[J]. *Chinese Journal of Nuclear Medicine*, 1994, 14(3): 161-163, T11.
- [8] 任志刚, 李小华. SPECT 重建滤波函数的选择与图像效果[J]. *中国医学物理学杂志*, 1998, 15(2): 67-68.
Ren ZG, Li XH. The selection of SPECT reconstruction filter function and the image quality[J]. *Chinese Journal of Medical Physics*, 1998, 15(2): 67-68.
- [9] 郑君里. 信号与系统[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
Zheng JL. *Signals and systems*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002.
- [10] 杨位钦, 顾岚. 时间序列分析与动态数据建模[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1986.
Yang WQ, Gu L. *Time series analysis and dynamic data modeling*[M]. Beijing: Beijing Industry University Press, 2002.

A Novel Method of CT Reconstruction Filter Function Design

SHI Ben-yi^{1,2}, WANG Cheng², CHEN Si-hai¹, BI Kun²✉,

1.College of Optoelectronic Science and Engineering, Huazhong
University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

2.Beijing Research Center for Information Technology in Agriculture,
Beijing 100097, China

Abstract: The design of filter function is very important in the CT reconstruction. In order to improve the image quality, a new method of filter function design was presented based on the FBP theory. Based on the simulated data of Shepp-Logan and the projection data of conch, the compared result of CT reconstruction using R-L filter function, S-L filter function and a new filter function based on the new design method was given. The reconstruction result of the new design filter function was the best in overall performance. In local areas, the density resolution had increased. So this paper provided a novel method for filter function designing in CT reconstruction.

Key words: filter function; CT reconstruction; FBP; weighted average

作者简介: 石本义 (1985—), 男, 华中科技大学硕士研究生, 主要从事机器视觉、射线成像、光机电检测仪器设备研发。Tel: 010-51503658, E-mail: siyewolf@163.com; 毕昆[✉] (1982—), 男, 华中科技大学生物医学工程博士, 主要从事机器视觉、射线成像、光机电检测仪器设备研发, Tel: 010-51503658, E-mail: bik@nercita.org.cn。