

薛会, 张丽, 刘以农. 非标准快速傅里叶变换算法综述[J]. CT 理论与应用研究, 2010, 19(3): 33-46.
Xue H, Zhang L, Liu YN. Overview of nonuniform fast Fourier transformation[J]. CT Theory and Applications, 2010, 19(3): 33-46.

非标准快速傅里叶变换算法综述

薛会, 张丽[✉], 刘以农

(清华大学工程物理系, 北京 100084)

摘要: 非标准快速傅里叶变换算法是一种用于处理非标准采样的快速算法, 在信号处理领域有着广泛的应用。本文回顾了 NUFFT 算法的历史和发展, 对通用的算法实现形式做了详细描述, 介绍了该算法的最新进展和研究方向。对 NUFFT 算法在 CT 重建中的应用, 如傅里叶重建, 迭代重建, 稀疏采样重建等也做了介绍。

关键词: 非标准离散傅里叶变换; 非标准快速傅里叶变换; CT 重建

文章编号: 1004-4140 (2010) 03-0033-14 **中图分类号:** TP 301.6 **文献标识码:** A

快速傅里叶变换算法 (Fast Fourier Transform, FFT) 的出现, 是数字信号处理发展史上的一个里程碑^[1]。Cooley 和 Tukey 提出的 FFT 算法, 将 N 点数据的离散傅里叶变换 (Discrete Fourier transform, DFT) 的计算量由 $O(N^2)$ 减少为 $O(N \log N)$, 使得快速计算成为可能。它的出现引起了人们极大的兴趣, 得到了迅速发展并广泛应用于科学技术的各个领域。在当今的世界中, FFT 算法几乎无处不在, 深刻影响了人类的生活, 由于它对人类社会做出的重大贡献, 因而被评价为二十世纪十大算法之一^[2]。

遗憾的是, FFT 算法对时域和频域数据的采样具有严格的要求, 其数据分布局限于均匀分布的标准网格上。而实际应用中, 往往出现数据采样分布于非均匀网格上的情形, 即非标准离散傅里叶变换 (Nonuniform Discrete Fourier Transform, NDFT) 问题, 如雷达信号处理^[3]、计算机断层成像^[4]、磁共振成像^[5]、超声成像^[6]等等, 传统的 FFT 算法对此束手无策。为了克服传统 FFT 算法的这一局限性, 利用其快速特性, 以避免直接计算 DFT 而付出的沉重代价, 非标准快速傅里叶变换 (NonUniform Fast Fourier Transform, NUFFT), 或称为非均匀快速傅里叶变换 (Non-equispaced Fast Fourier Transform) 应运而生。

NUFFT 算法最早可以上溯到天文学领域, 1975 年, Brouw^[7]提出了 gridding 方法, 用于实现极坐标网格采样的离散傅里叶变换, 这一方法被 O'Sullivan 引入到 CT 图像重建领域^[8], 随即在 MRI 图像重建中也得到了应用^[9]。1993 年, Dutt 等^[10]正式研究了 NDFT 问题的五种基本格式, 给出了快速算法, 并分析了其误差特性, 这可以看做是 NUFFT 算法的首次出现。从此, NUFFT 算法得到了广泛地关注, 新的研究成果不断涌现^[11-31]。

收稿日期: 2010-05-27。

基金项目: 国家自然科学基金 (10875066)。

目前, NUFFT 算法已经在众多领域得到了广泛运用。多分辨分析中很多新兴方法的实现也有赖于 NUFFT 算法的贡献, 如 Ridgelet 和 Curvelet 变换的快速计算^[31-32]; 傅里叶变换是求解微分方程的有力工具, NUFFT 算法的发展使它在处理实际问题时具有更多的灵活性; NUFFT 在带限信号恢复、滤波器设计^[33]中也发挥了其快速计算优势; 在成像领域, 它更成为 CT 重建、MRI 成像、雷达信号处理中强有力的工具。

1 NDFT 问题

给定均匀分布的采样 $\{x_n\}$, $n=0, 1, \dots, N-1$, N 离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT) 为^[34]:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i\omega n) \quad (1)$$

$X(\omega)$ 是周期为 2π 的连续函数, 当频域的目标采样点也被离散化为均匀分布的 N 个格点 $\omega_j = 2\pi j/N$ ($j=0, 1, \dots, N-1$) 时, 即可利用 FFT 快速计算:

$$X(\omega_j) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(\frac{-i2\pi jn}{N}\right) \quad (2)$$

然而在实际问题中, 我们经常需要在频域内计算一组非均匀分布格点上的傅里叶变换值, 即 $\omega_j = 2\pi v_j$, $v_j \in [0, 1]$ ($j=0, 1, \dots, M-1$) 的情形, 即要处理三角多项式,

$$X(v_j) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i2\pi n v_j) \quad (3)$$

实际应用中, 又往往写成如下形式:

$$X(v_j) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x_n \exp(-i2\pi n v_j) \quad (4)$$

其中, $j=-M/2, \dots, M/2-1$, $v_j \in [-1/2, 1/2)$, 这一形式被称为 NDFT。(4) 的形式通常被称为第二类 NDFT 问题, 显然, 直接计算需要 $O(NM)$ 的复杂度, 当计算规模较大时是很不切实际的, 因而需要寻求快速高效的算法。

2 NUFFT 算法

2.1 概述

Ware^[21]在综述性文章中介绍了 NDFT 问题的快速计算方法, 如三次样条插值, 局部 Chebyshev 近似, 欧拉和加速方法, 拉格朗日多项式插值算法等。这些算法利用 FFT 计算标准网格上的离散傅里叶变换值, 通过局部级数展开, 利用各种插值方法近似计算出目标网格上的值, 与后来流行的各种高效 NUFFT 算法有着紧密的联系, 可以看作是 NUFFT 算法的

雏形。

NUFFT 算法与 gridding 方法具有紧密的联系。早期的 gridding 方法^[7-9, 35-39]主要针对频域采样为非均匀直角坐标网格的问题, 如 CT 中的极坐标网格采样、MRI 中的螺旋采样等, 傅里叶重建需要将这些非均匀网格采样点插值到直角坐标下。简单的插值方法往往导致较大的误差, gridding 方法则是一种改进的网格化方法。其基本思路是, 对于非均匀分布的采样 $\hat{f}$, 首先用一个卷积核 $\hat{w}$ 进行平滑, 得到平滑后的直角坐标采样 $\hat{g} = \hat{w} * \hat{f}$, 这样便可以利用傅里叶反变换计算出 $g = wf$, 最后, 从 g 去除 w 的影响便得到了重建结果 f 。与直接插值方法相比, 由于 $\hat{w}$ 的平滑作用, 大大减小了插值误差, 使得 gridding 的结果有很高的准确性。gridding 实际上也是一种特殊的二维 NUFFT 算法, 由不均匀分布的频域采样计算标准网格分布的空域值, 也通常被称作第一类 NDFT 问题。通用的 NUFFT 算法在很大程度上受到了 gridding 方法的影响。

Dutt 等^[xx]提出了 NDFT 问题及其逆问题的 5 种基本形式, 他们研究了如下形式的函数:

$$\phi(x) = e^{-bx^2} e^{icx}, \quad b > 1/2, \quad x \in (-\pi, \pi) \quad (5)$$

利用截断的傅里叶级数作为对 e^{icx} 的极好近似, 证明了如下定理:

定理 1^[10]

假设有实数 $b > 1/2$, $c, d > 0$, 并令整数 $m \geq 2$, $q \geq 4b\pi$, 则, 对任意 $x \in [-d, d]$,

$$\left| \exp(icx) - \exp\left(b\left(\frac{x\pi}{md}\right)^2\right) \sum_{k=[cmd/\pi]-q/2}^{[cmd/\pi]+q/2} \rho_k \exp\left(\frac{ikx\pi}{md}\right) \right| < \exp\left(\frac{-b\pi^2}{1-1/m^2}\right) (4b+9) \quad (6)$$

其中,

$$\rho_k = \frac{\exp\left(\frac{-(c-k)^2}{4b}\right)}{2\sqrt{b\pi}} \quad (7)$$

定理说明, 任何具有形式 e^{icx} 的函数, 都可在实轴上的任意有限区间内以形如 $e^{-bx^2} e^{ikx}$ 的有限项来近似, 并且项数与 c 无关。据此他们提出了快速算法, 基于与 gridding 方法类似的思路, 首先采用适当的尺度因子修正了原始数据, 随即利用 FFT 计算出一个过采样的中间序列, 最终插值到目标网格上去。

Dutt 等给出的快速算法为之后迅速流行的通用 NUFFT 算法奠定了基础。1995 年, 他们又提出基于快速多极算法 (Fast Multipole Method, FMM) 来进行快速计算^[11]。同时 Beylkin 从连续傅里叶变换出发, 通过将已知函数向多分辨子空间投影的方法, 使用 B 样条曲线函

数作为子空间基函数,从另一个角度得到了 NDFT 问题的一种快速算法^[12]。Potts 和 Steidl 等^[13-14]统一了 Dutt 和 Beylkin 的算法,提出了 NUFFT 算法的一种通用形式,给出了其矩阵形式表达,并进行了进一步的误差分析。

大部分的 NUFFT 算法都采用了过采样技术,利用时域和频域都具有较好集中性的窗函数 φ 来进行计算。一般的,通用的 NUFFT 算法可以分为 3 个步骤:

- 1) 使用窗函数对原始数据进行加权;
- 2) 计算过采样 FFT;
- 3) 使用窗函数与过采样 FFT 的结果进行卷积,实际上是对目标网格点进行邻域插值。

其中,窗函数根据在加权和卷积时所起的不同作用,一般也被称为尺度因子和插值算子。

Nguyen 等^[15]在 Dutt 算法的基础上,提出了规则傅里叶矩阵的概念,将 NUFFT 的计算转换为最小二乘问题,给出了最小二乘意义上的最优解,改善了其误差特性。Fourmont 等则在算法中使用了 Kaiser-Bessel 窗,并将 NUFFT 运用于直接傅里叶重建,得到了很好的结果^[16]。Fessler 等^[17]提出了最小-最大 NUFFT 方法,基于使 NUFFT 在最差情况下的估计误差达到最小化的目的来设计插值算子。Greengard 等^[18]对 NUFFT 算法做了进一步改进,针对高斯函数的特性,采用了分裂方法,避免了重复计算,大大减少了传统 NUFFT 算法中预计算所需占用的存储空间,并提高了计算速度。Greengard 等^[19]研究了更具普遍性的第三类 NUFFT 问题。Anderson 等^[20]也采用了过采样技术,但其算法与通用的 NUFFT 方法略有不同,它是通过计算过采样序列相应的 DTFT 的各阶导数值,采用 Taylor 展开法来近似计算目标格点的傅里叶变换值。

2.2 通用 NUFFT 算法

Potts 等^[xx]从频域角度出发,给出了 NUFFT 算法的一种通用形式。

考虑函数,

$$X(v) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x_n e^{-i2\pi nv} \quad (8)$$

$X(v)$ 的周期为 1, NDFT 问题 (4) 即为计算 $X(v)$ 在离散采样点 $\{v_j\}$ 的值。引入过采样因子 $\alpha > 1$, 以及 $K = \alpha N$ 。引入适当的窗函数 $\tilde{\varphi}$, 将其以 1 为周期进行延拓得到:

$$\varphi(v) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \tilde{\varphi}(v+r) \quad (9)$$

$\varphi(v)$ 具有绝对收敛的傅里叶级数:

$$\varphi(v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{-2\pi i n v} \quad (10)$$

记 $I_N = \{n: -N/2 \leq n < N/2 - 1\}$, 用如下函数来近似 $X(v)$:

$$s_1(v) = \sum_{k \in I_K} g_k \varphi\left(v - \frac{k}{K}\right) \quad (11)$$

转换到频域中表达可得到：

$$s_1(v) = \sum_n \hat{g}_n c_n(\varphi) e^{-2\pi i n v} = \sum_{n \in I_K} \hat{g}_n c_n(\varphi) e^{-2\pi i n v} + \sum_{r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{n \in I_K} \hat{g}_n c_{n+Kr}(\varphi) e^{-2\pi i (n+Kr)v} \quad (12)$$

其中，

$$\hat{g}_n = \sum_{k \in I_K} g_k e^{2\pi i k n / K} \quad (13)$$

$$c_n(\varphi) = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(v) e^{2\pi i n v} dv \quad (14)$$

假设当 n 充分大，如 $|n| > K/2$ 时，傅里叶级数 $c_n(\varphi)$ 足够小，并且当 $n \in I_N$ 时， $c_n(\varphi) \neq 0$ ，为使 $s_1(v)$ 是 $X(v)$ 的良好近似，比较 (4) 和 (12)，下式成立：

$$\hat{g}_n = \begin{cases} x_n / c_n(\varphi), & n \in I_N \\ 0, & n \in I_K \setminus I_N \end{cases} \quad (15)$$

这样，利用长度为 K 的 FFT 可计算出 g_k 的值，此时的 $1/c_n(\varphi)$ 通常也称为尺度因子，它在进行过采样 FFT 之前起到预先平滑的作用，能够部分地消除目标网格分布不均匀带来的影响。若 $\tilde{\varphi}$ 在时域有很好的集中性，可被具有紧支撑的函数 $\tilde{\psi}$ 近似，其支撑区间满足 $\text{supp } \tilde{\psi} \subseteq [-J/K, J/K]$, $2J \ll K$ ，则 (20) 式可被截断，计算 $X(v_j)$ 时至多只需要其邻域的 $2J$ 个点参与运算，大大减少了计算量，从而得到 $X(v_j)$ 的近似表示：

$$X(v_j) \approx s_1(v_j) \approx s(v_j) = \sum_{k \in I_{K,J}(v_j)} g_k \psi\left(v_j - \frac{k}{K}\right) \quad (16)$$

其中， $I_{K,J}(v_j) := \{k \in I_N : Kv_j - J \leq k \leq Kv_j + J\}$ ， ψ 为 $\tilde{\psi}$ 以 1 为周期进行延拓的结果。由此，得到 NUFFT 的快速算法，其复杂度为 $O(K \log(K) + (2J+1)M)$ 。

算法 1 (NUFFT 算法)

输入： $N, \alpha > 1, K := \alpha N, v_j \in [-1/2, 1/2), x_n \in \mathbb{C}$

预计算: $c_n(\varphi)$, $\psi\left(v_j - \frac{k}{K}\right)$

1) 加权, 计算 $\hat{g}_n := x_n / c_n(\varphi)$, $n \in I_N$;

2) 过采样 FFT, 计算 $g_k := \frac{1}{K} \sum_{n \in I_N} \hat{g}_n e^{2\pi i k n / K}$, $k \in I_K$;

3) 卷积, 计算 $s(v_j) = \sum_{k \in I_{K,M}(v_j)} g_k \psi\left(v_j - \frac{k}{K}\right)$, $j \in I_N$ 。

输出: $s(v_j)$ 为对 $X(v_j)$ 的良好近似。

窗函数的选择是一个关键性的问题, 理想情形下, 它在频域是具有紧支撑的, 从而使得 (12) 式的截断误差为 0; 在时域也应当有很好的能量集中性质, 从而使得使用 ψ 近似时的截断误差尽量小。遗憾的是, 满足这样条件的精确解椭圆长球波函数 (Prolate Spheroidal Wavefunction, PSWF) 是难以实现的^[39]。Fourmont 等^[16]使用了 Kaiser-Bessel 窗作为对 PSWF 的一个极好近似, Dutt 等^[12]的算法实际上使用了截断的高斯函数^[10], Beylkin 算法则是采用 B 样条曲线作为窗函数的情形, Duijndam 等^[22]使用了汉明窗调制高斯函数替代了 Dutt 的截断窗, 改善了窗函数的特性。

常用的窗函数如下^[23]:

1) 高斯窗

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(v) &= (\pi b)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(Kv)^2}{b}\right) \\ \hat{\varphi}(n) &= \frac{1}{\alpha K} \exp\left(-b\left(\frac{\pi n}{\alpha K}\right)^2\right)\end{aligned}\quad (17)$$

其中: 常数 $b = \frac{2\alpha}{2\alpha-1} \frac{J}{\pi}$ 。

2) B 样条窗

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(v) &= M_{2J}(\alpha K v) \\ \hat{\varphi}(n) &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha K}, & n = 0 \\ \frac{1}{\alpha K} \text{sinc}^{2J}\left(\frac{n\pi}{\alpha K}\right), & \text{其他} \end{cases}\end{aligned}\quad (18)$$

3) Sinc 窗

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(v) &= \frac{K(2\alpha-1)}{2J} \operatorname{sinc}^{2m}\left(\frac{\pi K v(2\alpha-1)}{2J}\right) \\ \hat{\varphi}(n) &= M_{2J}\left(\frac{2Jn}{(2\alpha-1)K}\right)\end{aligned}\quad (19)$$

4) Kaiser-Bessel 窗

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(v) &= \begin{cases} \frac{\sinh\left(b\sqrt{J^2 - \alpha^2 K^2 v^2}\right)}{\pi\sqrt{J^2 - \alpha^2 K^2 v^2}}, & |v| \leq \frac{J}{\alpha K} \\ \frac{\sin\left(b\sqrt{\alpha^2 K^2 v^2 - J^2}\right)}{\pi\sqrt{\alpha^2 K^2 v^2 - J^2}}, & \text{其他} \end{cases} \\ \hat{\varphi}(n) &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha K} I_0\left(J\sqrt{K^2 - (2\pi n/\alpha^2 K^2)^2}\right), & n = -\alpha K\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right), \dots, \alpha K\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}\end{aligned}\quad (20)$$

其中：常数 $b = \pi(2 - 1/\alpha)$ ， I_0 为 0 阶 Bessel 函数。

$s(v_j)$ 对 $s_l(v_j)$ 的近似和 $s_l(v_j)$ 对 $X(v_j)$ 的近似均会引入计算误差，分别称为混叠误差和截断误差，对以上窗函数，分别有如下误差估计：

$$\left|s(v_j) - X(v_j)\right| \leq C(\alpha, J) \sum_{n \in I_N} |x_n| \quad (21)$$

其中，

$$C(\alpha, J) = \begin{cases} 4e^{-J\pi(1-1/(2\alpha-1))}, & \text{对(17)} \\ 4\left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)^{2J}, & \text{对(18)} \\ \frac{1}{J-1}\left(\frac{2}{\alpha^{2J}} + \left(\frac{\alpha}{2\alpha-1}\right)^{2J}\right), & \text{对(19)} \\ 5\pi^2 J^{3/2} \sqrt{1-1/\alpha} e^{-J2\pi\sqrt{1-1/\alpha}}, & \text{对(20)} \end{cases} \quad (22)$$

2.3 相关问题

2.3.1 矩阵形式

NDFT 问题 (4) 可以采用矩阵形式表示：

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (23)$$

其中,

$$\mathbf{X} = \left(X(v_j) \right)_{j=-M/2}^{M/2-1}, \quad \mathbf{x} = \left(x(n) \right)_{n=-N/2}^{N/2-1}, \quad \mathbf{A} = \left(e^{-i2\pi n v_j} \right)_{j=-M/2, n=-N/2}^{M/2-1, N/2-1}$$

当 $\mathbf{x}$ 为均匀分布网格的情况, 即得到傅里叶矩阵

$$\mathbf{F}_N = \left(e^{-i2\pi n j / N} \right)_{j=-N/2, n=-N/2}^{N/2-1, N/2-1}$$

NUFFT 算法可以表达如下:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{F}_K \mathbf{D} \mathbf{x} \quad (24)$$

其中, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ 为稀疏阵:

$$\mathbf{B} = \left(\psi \left(v_j - \frac{k}{K} \right) \right)_{j=-M/2, k=-K/2}^{M/2-1, K/2-1} \quad (25)$$

$$\mathbf{D} = \left(\mathbf{0} \left| \text{diag} \left(1 / K c_n(\varphi) \right)_{n=-N/2}^{N/2-1} \right| \mathbf{0} \right)^T \quad (26)$$

2.3.2 转置问题

另一类常见的 NDFT 问题是, 计算,

$$Y(j) = \sum_{n=-M/2}^{M/2-1} x_n e^{-i2\pi j v_n} \quad (27)$$

这是已知采样非均匀分布, 而目标网格均匀分布的情形, 实际上, 可利用矩阵形式写成 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}$ 的形式, 相应地, 也有类似于算法 1 的快速算法^[23]。

2.3.3 对称性

由于傅里叶变换的对称性, 正反变换形式上只是在指数项上有一个符号的差别, 有时频域和时域数据的地位会发生交换, 如时常需要根据已知频域采样, 由傅里叶反变换求解时域数据, 可以采用类似的快速算法, 也可称作 NUIFFT^[17]。

2.3.4 逆问题

对于 (23) 式的逆问题, 当 $\mathbf{A}$ 为可逆阵, 即标准离散傅里叶变换情形, 可以简单

地得到 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}$ ，然而，一般地，需要通过求解最小二乘问题^[17]，使用迭代算法进行求解：

$$\tilde{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{x}\| \quad (28)$$

Kunis 在其论文中^[24]，对更一般的情形做了深入的讨论。

2.3.5 多维 NUFFT

在实际应用中，往往要处理二维或三维的非均匀采样问题，NUFFT 算法可以简单地扩展到多维情形^[14, 23]。

2.4 NUFFT 算法的新进展

NUFFT 算法在得到广泛应用的同时，也不断发展，并催生了一系列新的算法。Kunis 等^[24]将 NUFFT 算法推广到在频域以特殊方式采样的情形，并以 NUFFT 算法为基础，发展了快速高斯变换。2007 年，Caporale 等^[25]提出在目标网格比较密集的情况下，利用奇异值分解方法来替代通用的窗函数加权，提出了一种新的快速算法。2008 年，Sørensen 等^[26]将 GPU 加速运用在 NUFFT 计算中，大大提高了运算速度。Potts^[27]等深入讨论了 NUFFT 算法的稳定性，阐述了估计误差和舍入误差对计算稳定性的强烈影响。Jacob 等针对 NUFFT 算法的缺点提出了最优最小二乘 NUFFT 算法 (Optimal Least Square NUFFT, OLS-NUFFT)，给出了依据最优最小二乘误差的原则选择插值算子和尺度因子的方法，使得算法具有了更多的自由度^[28]。Kunis^[29]在 Taylor 展开近似方法的基础上做了进一步的研究，提出了使用多维 Taylor 展开方法的不需要过采样的快速算法，节省了过采样方法需要消耗的大量存储空间。2009 年，Sammis 等^[30]将 NUFFT 算法推广到任意维单纯形如点、线、三角或四面体上，提出了几何非标准快速傅里叶变换 (Geometric NUFFT, GNUFFT) 的概念。

3 NUFFT 在 CT 重建中的应用

3.1 直接傅里叶重建

在 CT 重建中，需要从线积分重建图像，即对函数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ ，采集到其 Radon 变换：

$$Rf(\theta, s) = \int_{x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (29)$$

傅里叶中心切片定理给出了投影的一维傅里叶变换和图像的二维傅里叶变换之间的关系，指出对图像在 θ 视角投影的一维傅里叶变换等于图像的二维傅里叶变换在该角度下的一个切片。直接傅里叶变换方法即以中心切片定理为基础，由不同视角下的投影得到频率域中采样，从而最终通过反傅里叶变换重建出图像^[40]。

遗憾的是，由投影所得的频域采样分布在极坐标网格，而二维反傅里叶变换则要

求数据按标准直角坐标网格分布,在直接傅里叶重建中,必须在两个网格间对频域数据进行插值,通用的方法一般是采用径向角向的两步插值,往往需要很大的运算量,并导致重建图像中存在严重的伪影。Gridding 方法的提出,成为直接傅里叶重建方法的有效工具。

Fourmont^[16]采用了两种重建方法:①直接使用二维 NUFFT 从极坐标采样中重建图像,这等价于 gridding 方法;②采用一维 NUFFT 由投影得到径向非均匀分布的频域采样,从而为向直角坐标网格进行角向的线性插值提供了便利。

Linogram 算法是直接利用特定的同心矩形采样进行反傅里叶变换的成熟算法,将其与线性插值结合起来,以同心矩形网格为中间网格,可以实现从极坐标采样向直角坐标采样的变换。Potts 等^[41]基于 Linogram 算法提出,可以使用一维 NUFFT 直接由投影求出 Linogram 格式所需要的频域同心网格采样,从而避免了插值操作。

Averbuch 等^[42]提出了快速极坐标傅里叶变换 (Polar FFT, PFFT),也采用了两步插值方法,引入了伪极坐标网格作为中间网格,在插值时利用分数傅里叶变换或 Chirp-Z 变换减少了计算的复杂度,其算法类似于 Linogram,也可以看做是一种新的 NUFFT 变换方法。

为说明 NUFFT 变换在直接傅里叶重建中的有效性,进行如下数值模拟实验。选择原始图像为 256×256 的 Shepp-Logan 图,采用 0 到 180 度范围内的平行束投影,探测器数设置为 256。采用 Fourmont 提出的二维 NUFFT 方法^[16]进行重建,重建结果如图 1 中所示,图 1(a) 为原始图像,图 1(b) 为利用 NUFFT 方法重建结果。可见,NUFFT 方法有效地实现了直接傅里叶重建,重建图像中存在一定的伪影,可以通过增加采样数和改进 NUFFT 中的窗函数来进一步改善重建结果。



图 1 NUFFT 重建结果

Fig.1 Results of NUFFT reconstruction

3.2 迭代重建

迭代重建方法相对于滤波反投影等解析算法,有更好的灵活性,在投影数据不完备情况下也能重建图像,并且容易引入各种约束条件和先验知识,重建的图像往往具有更高的精度和质量,因此得到了广泛应用和研究^[43]。

在迭代重建中, 往往需要进行反复的投影和反投影操作, 需要消耗大量时间。Matej 等^[45]指出, 在平行束投影重建中, 利用中心切片定理, 可以采用傅里叶变换方法来替代投影和反投影操作, 他们使用 NUFFT 方法, 大大减少了运算量, 将重建速度提高了 10 倍以上^[44]。随后, 这一方法被推广到了扇束情形。

3.3 稀疏采样重建

在图像重建中, 往往需要处理有限角度和少量视角问题等稀疏采样情形。2004 年, Candes 等^[46]提出了在高度不完备数据下的信号恢复理论, 指出只要信号在某个变换域中具有稀疏性, 则可由少量随机采样以相当大的概率精确重建信号, 这一理论也往往称之为压缩感知 (compressive sensing) 或压缩采样 (compressive sampling)。他们将此理论运用到 CT 图像重建中, 由 22 个稀疏投影得到精确重建结果。Maleh 等^[48]采用了贪心策略解决不完备数据重建问题, 开辟了另一条稀疏采样重建的途径。

设 Γ 为 Z^d 的有限子集, f 具有稀疏的傅里叶系数:

$$f(x) = \sum_{k \in \Gamma} c_k e^{ik \cdot x}, \quad x \in [0, 2\pi]^d \quad (30)$$

则可由 f 的 N 个随机采样恢复出 c_k , 也即由离散傅里叶变换的部分信息重建出稀疏向量。Kunis 等^[47]采用了正交匹配追踪算法 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP) 方法来进行求解, 在这一方法中, NUFFT 算法发挥了重要的作用, 使得利用随机采样进行重建成为可能。基于同样的思路, Maleh 等^[48]将 OMP 算法用于处理梯度稀疏图像的稀疏采样重建问题, 提出了梯度 OMP 算法, 由随机采样的傅里叶系数进行重建, 取得了很好的效果。他们指出, 这一方法较之传统的 TV 正则化方法具有更高的速度, 可以在较大规模的重建问题中发挥其优势。

4 结束语

NUFFT 算法经过多年的发展, 已经具有成熟的体系, 本文对现有的 NUFFT 算法进行了总结, 介绍了最常用的算法格式以及 NUFFT 算法的最新进展, 并对 NUFFT 算法在 CT 图像重建中的应用做了简要介绍。NUFFT 算法的提出, 使得采样具有更多的灵活性, 不必局限于规整的均匀网格, 为傅里叶变换的实际应用开辟了更广阔的空间, 随着 NUFFT 算法日新月异的发展, 必将在更多的领域中发挥出重要的作用。

参考文献

- [1] Cooley JW, Tukey JW. An algorithm for machine calculation of complex Fourier series[J]. Math Comput, 1965, 19: 297-301.
- [2] Dongarra J, Sullivan S. The top 10 algorithms[J]. Computing in Science and Engineering, 2000, 2: 22-23.
- [3] Song J, Liu QH, Kim K, et al. High-resolution 3-D radar imaging through nonuniform fast Fourier transform (NUFFT) [J]. Commun Comput Phys, 2006, 1(1): 176-191.
- [4] Schaller S, Flohr T, Steffen P. An efficient Fourier method for 3-D radon inversion in exact

- cone-beam CT reconstruction[J]. IEEE Trans Med Imag, 1998, 17(2): 244-250.
- [5] Sarty GE, Bennett R, Cox R W. Direct reconstruction of non-Cartesian k -space data using a nonuniform fast Fourier transform[J], Magn Reson Med, 2001, 45(5): 908-915.
- [6] Bronstein MM, Bronstein AM, Zibulevsky M, et al. Reconstruction in diffraction ultrasound tomography using nonuniform FFT[J]. IEEE Trans Med Imag, 2002, 21(11): 1395-1401.
- [7] Brouw WN. Aperture synthesis[J]. Methods in Computational Physics, 1975, 14: 131-175.
- [8] O'Sullivan DJ. A fast sinc function gridding algorithm for Fourier inversion in computer tomography[J]. IEEE Trans Med Imag, 1985, MI-4(4): 200-207.
- [9] Meyer CH, Hu BS, Nishimura D G, et al. Fast spiral coronary artery imaging[J]. Map Reson Med, 1992, 28: 202-213.
- [10] Dutt A, Rokhlin V. Fast Fourier transforms for nonequispaced data[J]. SIAM J Sci Comput, 1993, 14(6): 1368-1393.
- [11] Dutt A, Rokhlin V. Fast Fourier transforms for nonequispaced data II[J]. Appl Comput Harmon Anal, 1995, 2: 85-100.
- [12] Beylkin G. On the fast Fourier transform of functions with singularities[J]. Appl Comput Harmon Anal, 1995, 2: 363-381.
- [13] Potts D, Steidl G, Tasche M. Fast Fourier transforms for nonequispaced data: A tutorial[M]. Appl Numer Harmon Anal, Birkhäuser, Boston: 2001, 249-274.
- [14] Steidl G. A note on fast fourier transforms for nonequispaced grids[J]. Adv Comput Math, 1998, 9: 337-352.
- [15] Nguyen N, Liu Q. The regular Fourier matrices and nonuniform fast Fourier transforms[J]. SIAM J Sci Comput, 1999, 21(1): 283-293.
- [16] Fourmont K. Non equispaced fast Fourier transforms with applications to tomography[J]. J Fourier Anal Appl, 2003, 9(5): 431-450.
- [17] Fessler J, Sutton B. Nonuniform fast Fourier transforms using min-max interpolation[J]. IEEE Trans Signal Process, 2003, 51(2): 560-574.
- [18] Greengard L, Lee JY. Accelerating the nonuniform fast Fourier transform[J]. SIAM Rev, 2004, 46(3): 443-454.
- [19] Greengard L, Lee J-Y. The type 3 nonuniform FFT and its applications[J]. J Comput Physics, 2005, 206: 1-5.
- [20] Anderson C, Dahleh M. Rapid computation of the discrete Fourier transform[J]. SIAM J Sci Comput, 1996, 17(4): 913-919.
- [21] Ware A F. Fast approximate Fourier transforms for irregularly spaced data[J]. SIAM Rev, 1998, 40(4): 838-856.
- [22] Duijndam AJW, Schonewille MA. Nonuniform fast Fourier transform[J]. Geophysics, 1999, 64(2): 539-551.
- [23] Potts D, Steidl G. Fast summation at nonequispaced knots by NFFTs[J]. SIAM J Sci Comput, 2003, 24: 2013-2037.
- [24] Kunis S. Nonequispaced FFT generalisation and inversion[D]. Dissertation, University of Lubeck, 2006.
- [25] Caporale S, Marchi LD, Speciale N. A SVD-based algorithm for dense nonuniform fast Fourier Transform[C]. 15th European Signal Processing Conference, 2007.
- [26] Sørensen TS, Schaeffter T, Noe KØ, et al. Accelerating the nonequispaced fast Fourier transform on commodity graphics hardware[J]. IEEE Trans Med Imag, 2008, 27(4): 538-547.
- [27] Potts D, Tasche M. Numerical stability of nonequispaced fast Fourier transforms[J]. Journal

- of Computational and Applied Mathematics, 2008, 222: 655-674.
- [28] Jacob M. Optimized least-square non-uniform fast Fourier transform (OLS-NUFFT)[J]. IEEE Trans Signal Process, 2009, 57(6): 2165-2177.
- [29] Kunis S. Nonequispaced fast Fourier transforms without oversampling[C]. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2008.
- [30] Sammis S, Strain J. A geometric nonuniform fast Fourier transform[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228: 7086-7108.
- [31] Fenn M. Fast Fourier transform at nonequispaced nodes and applications[D]. Dissertation, University of Mannheim, 2006.
- [32] Candes E, Demanet L, Donoho D, et al. Fast discrete curvelet transforms[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2006, 5(3): 861-899.
- [33] Angelidis E, Diamessis JE. A novel method for designing FIR digital filters with nonuniform frequency samples[J]. IEEE Tr Sig Proc, 1994, 42(2): 259-267.
- [34] 胡广书. 数字信号处理: 理论、算法与实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 100-124.
Hu GS. Digital signal processing: Theory, algorithm and realization[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003: 100-124.
- [35] Schomberg H, Timmer J. The gridding method for image reconstruction by Fourier transformation[J]. IEEE Trans Med Imag, 1995, 14(3): 596-607.
- [36] Kaveh M, Soumekh M, Greenleaf J F. Signal processing for diffraction tomography[J]. IEEE Trans Sonics Ultrason, 1984, SU-31(4): 230-238.
- [37] Jackson J, Meyer C, Nishimura D, et al. Selection of a convolution function for fourier inversion using gridding[J]. IEEE Trans Med Imag, 1991, 10(3): 473-478.
- [38] Beatty P, Nishimura D, Pauly J. Rapid gridding reconstruction with a minimal oversampling ratio[J]. Trans Med Imag, 2005, 24(6): 799-808.
- [39] Nuttall AH. Some windows with very good sidelobe behavior[J]. IEEE Trans Acoust, Speech, Signal Processing, 1981, ASSP-29(1): 84-91.
- [40] 谢强. 计算机断层成像技术: 原理、设计、伪像和进展[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 27-38.
Hsieh J. Computed tomography: Principles, design, artifacts, and recent advances[M]. Beijing: Science Press, 2006: 27-38.
- [41] Potts D, Steidl G. A new linogram algorithm for computerized tomography[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2001, 21: 769-782.
- [42] Averbuch A, Coifman RR, Donoho D L, et al. Fast and accurate Polar Fourier transform[J]. Appl Comput Harmon Anal, 2006, 21: 145-167.
- [43] 王振天, 张丽, 邢宇翔, 等. 统计重建算法综述[J]. CT理论与应用研究, 2007, 16(4): 8-21.
Wang ZT, Zhang L, Xing YX, et al. Overview of statistical reconstruction algorithms[J]. CT Theory and Applications, 2007, 16(4): 8-21.
- [44] Matej S, Fessler JA, Kazantsev IG. Iterative tomographic image reconstruction using Fourier-based forward and back-projectors[J]. IEEE Trans Med Imag, 2004, 23(4): 401-412.
- [45] Zhang YY, Fessler JA. Fourier-based forward and back-projectors in iterative fan-beam tomographic image reconstruction[J]. IEEE Trans Med Imag, 2006, 25(5): 582-589.
- [46] Candes EJ, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans Inf Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [47] Kunis S, Rauhut H. Random sampling of sparse trigonometric polynomials II -orthogonal matching pursuit versus basis pursuit[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2008,

8(6): 737-763.

[48] Maleh R, Gilbert AC, Strauss MJ. Sparse gradient image reconstruction done faster[C]. IEEE International Conference on Image Processing, 2007: 641-644.

Overview of Nonuniform Fast Fourier Transformation

XUE Hui, ZHANG Li[✉], LIU Yi-nong

(Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Nonuniform fast Fourier transformation (NUFFT), as an efficient method for irregular sampling problem, is widely used in signal processing. This article gives a review of the history and development of NUFFT, followed by a detailed depiction of the general scheme of the algorithm. The newly improvements in the past few years is also discussed. Finally, it is shown that NUFFT performs well in CT reconstruction, such as Fourier reconstruction, iterative reconstruction and sparse sampling problems.

Key words: NDFT; NUFFT; CT reconstruction

作者简介: 薛会 (1986—), 男, 清华大学工程物理系在读博士生, 现主要从事 CT 成像算法和工程应用方面的研究, Tel: 010-831-86209, E-mail: blueplasmaice@gmail.com; 张丽[✉] (1970—), 女, 清华大学工程物理系研究员, 主要从事 CT 理论和重建算法研究, Tel: 010-831-86201, E-mail: zhangli@nuctech.com。