

李飞, 潘晋孝. 基于多目标优化的有限角度图像重建算法及实现[J]. CT 理论与应用研究, 2010, 19(1): 1-8.  
Li F, Pan JX. Limited Angle Image Reconstruction Algorithm Based on Multi-objective Optimization[J]. CT Theory and Applications, 2010, 19(1): 1-8.

# 基于多目标优化的有限角度图像重建算法及实现

李飞, 潘晋孝✉

(中北大学理学院数学系, 山西 太原 030051)

**摘要:** 本文综合考虑了图像局部和整体的平滑性, 以及最大熵准则, 重新建立新的多目标优化模型, 并在求解过程中引入同伦参数加快收敛速度。通过仿真实验, 验证了所提算法能较好地改善有限角度下图像重建的质量及提高重建速度。

**关键词:** 多目标优化; 图像重建; 同伦参数

**文章编号:** 1004-4140 (2010) 01-0001-08    **中图分类号:** O 242.1; TG 115.28    **文献标识码:** A

计算机断层成像 (Computed Tomography, CT) 技术经过几十年的发展, 现在已被广泛应用于工业无损检测、安全检查以及医学诊断等领域。在投影数据满足 Tuy-Smith 数据完备性条件<sup>[1-2]</sup>时, CT 成像才能精确重建断层图像。在实际应用中, 受检测环境、检测时间以及检测成本等的限制, 扫描角度常常少于  $180^\circ$ , 不能获得完整的投影数据。因此, 研究在有限角度下用少量的投影数据进行不完全数据重建就有非常重要的意义。首次将优化原理用于图像重建的是 Kashyap 和 Mittal<sup>[3]</sup>。优化重建的基本思想是选择一个合理的目标函数进而找出一种使目标函数达到最优值的有效算法。对于图像重建而言, 合理的目标函数有多种: 最小二乘法<sup>[4]</sup>、最小范数法<sup>[5]</sup>、二次方优化<sup>[6]</sup>等。传统的单目标优化算法由于只考虑单一目标函数, 而造成重建结果质量差、伪影严重。本文利用多目标优化理论, 针对有限角度重建的特性, 合理选取多个目标函数并建立多目标模型进行重建, 取得了较好的效果。

## 1 有限角度重建的一般算法

目前有限角度图像重建算法很多, 大致可以分为两类: 基于变换的迭代解析重建算法和基于级数展开的迭代-代数/统计重建算法<sup>[7-8]</sup>。

### 1.1 变换法

变换法的基本思想是通过在几个相关数据空间的迭代 (也可以是非迭代) 来估计缺失部分的数据。就 CT 重建而言, 一般涉及以下 3 个空间: 图像空间 (image space)、投影空间 (radon space) 及频域空间 (Fourier space)。常见的算法有 Tomosynthesis 算法<sup>[9]</sup>、

---

收稿日期: 2009-12-05。

基金项目: 国家自然科学基金 (60772102)。

IRR/GP 算法<sup>[10]</sup>、正交函数法<sup>[11]</sup>。该类算法需要根据先验知识对缺失的数据进行估计，但是先验知识和约束条件不易加入，因此对数据比较敏感，重建速度也比较慢。

## 1.2 迭代法

从数学角度上看，对有限角度情况下不完全数据的迭代重建算法，相当于求大型欠定方程组的最优解。相比而言，这种在有限角度情况下基于级数展开的迭代算法比变换法有着更好的重建效果，能够有效地减少伪影抑制噪声，但是对于这种特殊的方程组求解采取何种优化准则一直是其发展的瓶颈。

汪元美等首次引进多准则优化为基础的图像重建理论<sup>[12-13]</sup>，多准则图像重建运用了运筹学中多目标优化的数学方法，克服了以往重建算法中偏重单个性能指标的不足，使重建的图像在多个性能指标上与原始图像相一致，产生较满意的结果。但是怎样选取合适的准则函数，以其求解过程中选取什么样的权系数，一直是该方法面临的问题。本文分别从微观和宏观考虑不完全投影重建过程中图像相邻像素间的关系和图像整体的平滑性，选取适当的准则函数，根据多目标优化理论建立多目标优化模型来重建图像。

## 2 基于多目标优化的有限角度图像重建模型

迭代投影重建的数学模型一般表示如下：

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{y}$  为实际测量得到的投影数据， $\mathbf{A}$  为投影矩阵， $\mathbf{x}$  为待重建图像。下面是 (1) 式的具体创建过程。对于待重建图像  $\mathbf{x}$ ，其中任一像素  $j$  对某一射线  $i$  的投影贡献为：

$$y_{ij} = A_{ij} x_j \quad (2)$$

其中， $x_j$  表示待重建图像的第  $j$  个像素； $y_{ij}$  表示像素  $j$  对射线  $i$  的射线投影贡献； $A_{ij}$  表示像素  $j$  对射线  $i$  的权值贡献，其定义如下：

$$\begin{cases} A_{ij} = 1, \text{射线} i \text{通过像素} j \\ A_{ij} = 0, \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

射线  $i$  还经过其他像素，其总的射线投影为：

$$y_i = \sum_j y_{ij} = \sum_j A_{ij} x_j \quad (4)$$

$y_i$  为射线  $i$  穿过物体后在探测器上得到的投影值<sup>[14]</sup>。

但是实际情况下，测量误差、噪声影响是不可避免的，所以引入误差  $e$  后投影重建方程就表示如下：

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (5)$$

图像重建就是由  $y$  求解  $x$  的方法。

如上所述，本文将引入如下目标函数：

1) 由于图像中相邻像素间的灰度（或密度）平均来讲是十分接近的，因此为了消除由于投影数据不完全而造成相邻像素间像素值差异大的影响，我们引入如下目标函数：

$$\hat{f}_1(x) = \sum_{j \in N} \left( x_j - \frac{1}{8} \sum_{k \in N_j} x_k \right)^2 \quad (6)$$

式中， $N$  表示不靠边界的像素集合， $N_j$  表示与  $x_j$  相邻的 8 个像素的集合。因此就要选取使  $\hat{f}_1(x)$  达到最小的  $x$ ，其物理意义是尽量使每一个像素值等于周围的 8 个像素的平均值。

2) 考虑图像整体的平滑性。一般情况下图像灰度变化较平缓，即图像较平滑，要考虑这一情况，应使图像的方差最小，可由如下目标函数表示：

$$\hat{f}_2(x) = \sum_{j=1}^J (x_j - \bar{x})^2 \quad (7)$$

式中  $\bar{x} = \sum_{j=1}^J x_j / J$  为像素值的平均值。要求选择这样的  $x$ ，使  $\hat{f}_2(x)$  最小，此时图像最平滑。

显然  $\hat{f}_1(x)$  和  $\hat{f}_2(x)$  在物理意义上是有差别的： $\hat{f}_2(x)$  考虑的是整幅图像的平滑度，而  $\hat{f}_1(x)$  只考虑单一像素同其相邻像素间的局部平滑情况。但是考虑到这两个目标函数的相似性，以及其优化过程的一致性，本文将这两个函数合并成一个目标函数：

$$\hat{f}_3(x) = \sum_{j \in N} \left( x_j - \frac{1}{8} \sum_{k \in N_j} x_k \right)^2 + \sum_{j=1}^J (x_j - \bar{x})^2 \quad (8)$$

通过函数  $\hat{f}_3(x)$  进行极小化，可以使得同一幅图像以及图像中的各个像素之间具有最大的平滑性。这样可以通过与其他目标函数的共同作用，增加重建结果的准确性，也能够获得高质量的图像；此外也进一步加强了对各种噪声的抑制，提高图像重建质量。

3) 考虑适用于投影数据不完全场合的最大熵准则。设已知像素值  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ) 的平均值为  $\bar{x}$ ，则最多有一个矢量  $x$ ，它的所有分量  $x_j \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq J$  的平均值为  $\bar{x}$ ，并使下面的  $\hat{f}_4(x)$  最大，这样将最大限度的增加抗噪声能力和去除边缘伪影的能力。

$$\hat{f}_4(x) = - \sum_{j=1}^J \left( \frac{x_j}{J \bar{x}} \right) \ln \left( \frac{x_j}{J \bar{x}} \right) \quad (9)$$

式中的平均值  $\bar{x}$  可以根据测得的投影数据进行估计，因为某一射线经过的像素是可知的，它的射线和是测得的，因此这一射线上的平均像素值也可知，只要考虑覆盖图像区域的一组射线和就可求得足够数目的射线上的平均像素值，那么就可以计算出  $\bar{x}$ <sup>[15]</sup>。

4) 为了更好地控制重建图像的精度, 使重建误差最小, 引进如下约束条件:

$$g(x) = \sum_{i=1}^I \left( \sum_{j=1}^J a_{ij} x_j - y_i \right) - \delta = 0 \quad (10)$$

式中  $\delta$  为预先设定的常数, 用于控制重建的精度。显然,  $\delta$  的理想极限值为零, 即重建结果再投影数据与原始投影数据完全相同。

基于以上讨论, 得到如下多目标图像重建模型  $M_1$ :

$$M_1 \begin{cases} \min f_1(x) = \gamma_1 \cdot \left( \sum_{j \in N} \left( x_j - \frac{1}{8} \sum_{k \in N_j} x_k \right)^2 + \sum_{j=1}^J (x_j - \bar{x}) \right) \\ \max f_2(x) = \gamma_2 \cdot \left( -\sum_{j=1}^J \left( \frac{x_j}{J \bar{x}} \right) \ln \left( \frac{x_j}{J \bar{x}} \right) \right) \\ \text{s.t. } g(x) = \sum_{i=1}^I \left( \sum_{j=1}^J a_{ij} x_j - y_j \right) - \delta = 0 \end{cases} \quad (11)$$

即

$$M_1 \begin{cases} \min f_1(x) = \gamma_1 \cdot \left( \sum_{j \in N} \left( x_j - \frac{1}{8} \sum_{k \in N_j} x_k \right)^2 + \sum_{j=1}^J (x_j - \bar{x}) \right) \\ \min f_2(x) = \gamma_2 \cdot \left( \sum_{j=1}^J \left( \frac{x_j}{J \bar{x}} \right) \ln \left( \frac{x_j}{J \bar{x}} \right) \right) \\ \text{s.t. } g(x) = \sum_{i=1}^I \left( \sum_{j=1}^J a_{ij} x_j - y_j \right) - \delta = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中  $\gamma_1, \gamma_2$  是权系数参数, 且满足  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ ,  $\gamma_1, \gamma_2$  的大小是目标函数权重的衡量。

### 3 有限角度图像重建算法实现

为了避免权系数选取的盲目性, 本文借助同伦思想, 用同伦参数<sup>[16]</sup>代替权系数构造同伦映射得到多目标优化模型:

$$M_2 \begin{cases} \min H(x, \lambda) = \sum_{l=1}^2 (1 - \lambda_l) f_l(x) + \lambda_l g(x) \\ \text{s.t. } g(x) = \sum_{i=1}^I \left( \sum_{j=1}^J a_{ij} x_j - y_j \right) - \delta = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中  $\lambda_l \in [0, 1]$ ，对应为第  $l$  个目标函数的同伦参数。

根据同伦参数的特性， $\lambda$  将从 1 单调下降到 0，本文用 Newton 同伦方法<sup>[17]</sup>跟踪求解图像向量  $x$ ，具体步骤如下：

(1)  $\forall x_0 \in R^n, \lambda_0 = 1$ ，预估步长  $h_0 > 0$ ，误差精度  $\varepsilon > 0$ ，终止参数  $\lambda^* > 0, k = 0$ ；

(2) 计算下一个迭代参数  $\lambda_{k+1}$ ： $\lambda_{k+1} = \lambda_k - h_k$ ；其中， $h_k$  是某一步长；

(3) 计算下一个迭代点  $x_{k+1}$ ： $x_{k+1} = x_k - H'(x_k, \lambda_{k+1})^{-1} H(x_k, \lambda_{k+1})$ ；

(4) 修正步长  $h_{k+1}$ ：

若  $\|H(x_{k+1}, \lambda_{k+1})\| > 1.0$ ，取  $h_{k+1} = 0$ ，

若  $\|H(x_{k+1}, \lambda_{k+1})\| \in [0.1, 1.0]$ ，取  $h_{k+1} = 0.1 \bar{h}_k$ ，

若  $\|H(x_{k+1}, \mu_{k+1})\| \in [10^{-3}, 0.1]$ ，取  $h_{k+1} = \left( \frac{111}{110} - \frac{1}{11} \|H(x_{k+1}, \lambda_{k+1})\| \right) \bar{h}_k$ ，

若  $\|H(x_{k+1}, \lambda_{k+1})\| < 10^{-3}$ ，取  $h_{k+1} = \bar{h}_k$ ，其中， $\bar{h}_k = \min\{h_0, 0.95 \lambda_k\}$ ；

(5) 若  $\|H(x_{k+1}, \lambda_{k+1})\| \leq \varepsilon$  及  $\lambda_{k+1} \leq \lambda^*$  终止；此时即可作为所求近似解，否则继续；

(6) 置  $k = k + 1$ ，转到 (2)。

#### 4 实验及结果分析

为了验证本算法的有效性，本文对一工件进行投影仿真并重建，主要参数如下：工件直径为 40 的铝质圆柱，里面包含 8 个直径分别为 2、3、3、4、4、5、6 和 5.5 的钢质圆柱（注：钢和铝纯度为 100%），射线源到物体转轴中心距离 900 mm，旋转中心到探测器的距离 200 mm。图像大小为  $256 \times 256$ ，在  $0 \sim 150^\circ$  范围内均匀选取 150 个扫描角度进行重建。

由图 3、图 4 可以看出，由于投影数据不完全而造成图像边缘模糊、平滑性差且图中小圆有不同程度的变形；但是用本文中算法重建的图像（图 2）要清晰得多，图像边缘模糊被有效抑制，图像的灰度变化也较平缓。

为了更进一步证明本文算法的有效性，表 1 给出了上述几种方法的在同一迭代次数下的重建时间以及重建误差，其中重建误差  $e$  定义为：

$$e = \frac{\sum_j (x_j - \hat{x}_j)^2}{\sum_j (x_j)^2} \quad (14)$$

其中  $x_j$  表示原始图像元素， $\hat{x}_j$  表示重建图像元素。

表 1 是针对图 1 进行的比较，可以看出在相同的迭代次数下，本文提出的算法较传统多目标重建算法在减小误差方面有明显改善。

通过比较可以看出，本文所提出的多目标优化模型具有如下优点：

- (1) 多目标优化重建算法能够很好地抑制图像边缘伪影，且图像对比度高；
- (2) 在迭代次数相同时，所得到的结果较其他算法好；
- (3) 在迭代次数相同时，多目标优化模型具有更快的收敛速度。

表 1 仿真重建算法性能分析

Table 1 The performance analysis of the simulation results

| 重建算法      | 迭代次数 | 误差    | 迭代时间/s |
|-----------|------|-------|--------|
| 本文方法      | 50   | 0.125 | 132.05 |
| 最小二乘单目标算法 | 50   | 0.657 | 200.03 |
| ART 算法    | 50   | 0.232 | 156.02 |

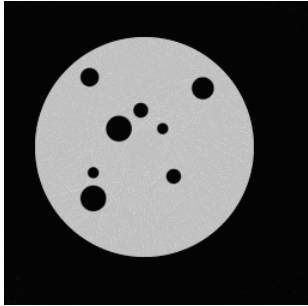


图 1 原始图像

Fig.1 The original image

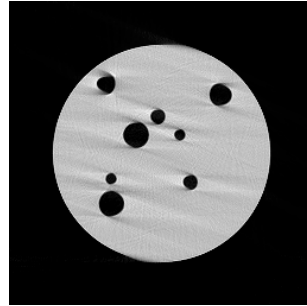


图 2 本文图像重建算法重建结果 (50 次迭代)

Fig.2 The reconstruction image by using this paper's algorithm

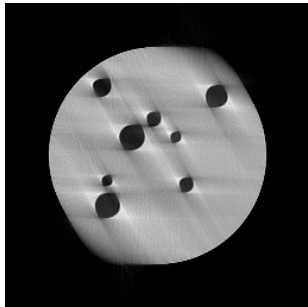


图 3 最小二乘单目标算法重建结果 (50 次迭代)

Fig.3 The reconstruction image by using the least square single objective algorithm

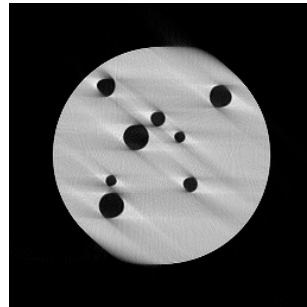


图 4 ART 算法重建结果 (50 次迭代)

Fig.4 The reconstruction image by using the ART algorithm

## 5 结论

综上所述, 本文针对有限角度情况下投影数据不完全造成重建图像质量差的问题, 利用多目标优化法, 在综合考虑了图像局部和整体的平滑性, 以及最大熵准则建立多目标优化模型。此外, 在求解过程中借助同伦参数的有界性来加快解的收敛速度。最后, 本文利用最小二乘单目标算法、ART 算法以及本文算法分别做了仿真实验, 通过对仿真结果的对比,

得到文中提出算法的有效性。由于综合考虑多个目标函数, 因此能够很好地抑制图像边缘伪影, 且在平滑性、误差、以及重建速率方面均有显著改善。

## 参考文献

- [1] Tuy H. An inversion formula for cone-beam reconstruction[J]. *SIAM J Appl Math*, 1983, 43(3): 546-552.
- [2] Simth BD. Image reconstruction from cone-beam projections: Necessary and sufficient conditions and reconstruction methods[J]. *IEEE Trans Med Imag*, 1985, 4(1): 14-25.
- [3] Kashyap RL, Mittal MC. Picture reconstruction from projections[J]. *IEEE Trans Computer*, 1975, 24(9): 915-923.
- [4] Werneche SJ, Addario LR. Maximum entropy image reconstruction[J]. *IEEE Trans Comput C*, 1977, 26(4): 351-364.
- [5] Gilbert P. Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projection[J]. *J Theor Biol*, 1972, 36(2): 105-107.
- [6] Lakshminarayannan AV, Lent A. Methods of leastsquare and SIRT in reconstruction[J]. *J Theor Biol*, 1979, 76(3): 267-295.
- [7] Herman GT. Image reconstruction from projections[M]. New York: Academic, 1980: 15-27.
- [8] Rangayyan R, Dhawan AP, Gordan R. Algorithms for limited-view computed tomography: An annotated bibliography and a challenge[J]. *Appl Opt*, 1985, 24: 4000-4012.
- [9] Verhoeven D. Limited-data computed tomography algorithms for the physical sciences[J]. *Appl Opt*, 1993, 32(2): 3736-3754.
- [10] Verhoeven D. Limited-data computed tomography algorithms for the physical sciences[J]. *Appl Opt*, 1993, 32(2): 3736-3754.
- [11] Kim JH, Kwak KY, Park SB, et al. Projection space iteration reconstruction reprojection[J]. *IEEE Trans Med Imag*, 1985, 4(1): 139-143.
- [12] Wang YM, Lv WX. Multi-objective decision making approach to image reconstruction from projections[J]. *J Opt Soc Am A*, 1991, 8(10): 1649-1656.
- [13] Lv WX, Wang YM, Luo JH. A new approach to medical image reconstruction[J]. *IEEE End Med Bio*, 1997, (July/August): 241-246.
- [14] 王浩, 卢孝强, 孙怡. 基于改进正则化方法的有限角度 CT 图像重建算法[J]. *CT 理论与应用研究*, 2008, 17(4): 15-22.  
Wang H, Lu XQ, Sun Y. CT Reconstruction algorithm from limited-angle using modified regularization method[J]. *CT Theory and Applications*, 2008, 17(4): 15-22.
- [15] 庄天戈. CT 原理与算法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1992: 85-87.  
Zhuang TG. Principle and algorithm of CT[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1992: 85-87.
- [16] 王则柯, 高堂安. 同伦方法引论[M]. 重庆: 重庆出版社, 1990: 50-84.  
Wang ZK, Gao TA. Introduction to homotopy theory[M]. Chongqing: Chongqing Publishing House, 1990: 50-84.
- [17] 姚光明, 宋文. 多目标规划的同伦方法[J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2007, 24(2): 254-256.  
Yao GM, Song W. Homotopy method for multi-objective programming problems[J]. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 2007, 24(2): 254-256.

# Limited Angle Image Reconstruction Algorithm Based on Multi-objective Optimization

LI Fei, PAN Jin-xiao<sup>✉</sup>

(Department of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** Single objective optimization algorithm is one of the methods for limited angle reconstruction, but it can not make out the exact solution because of the only objective function. So we built the multi-objective optimization model by considering the local flatness, global smoothness and the maximum entropy rule. Finally, simulations were carried out to verify the proposed method, and the simulation results showed that this algorithm can improve the image quality and the speed of reconstruction of limited angle.

**Key words:** multi-objective optimization; image reconstruction; homotopy parameter

**作者简介:** 李飞 (1983—), 男, 2003 年获得中北大学学士学位, 目前为中北大学应用数学专业硕士研究生, 主要从事 CT 成像数学算法及工程应用等方面的研究, Tel: 13753119375, E-mail: feixiang1983929@163.com; 潘晋孝<sup>✉</sup> (1966—), 男, 2004~2006 年北京应用数学专业博士后流动站博士后, 目前为中北大学数学系教授、博士生导师, 主要从事用矩阵理论、随机过程、小波理论、现代优化计算方法、泛函分析等数学的理论和方法, 研究图像信息处理及增强, Tel: 0351-3923300, E-mail: panjx@nuc.edu.cn。