

# 图象重建中的基本定理及其数值计算

王卫东

包尚联

(解放军总医院生物医学工程学研究室, 北京100853) (北京大学重离子物理研究所, 北京100871)

**摘要:** 本文系统地给出了基于投影的图象重建的6个基本定理及其数值计算方法。研究了变焦束投影的扫描方式主要用于单光子断层扫描(SPECT)中以提高信噪比和分辨力。

计算机仿真结果表明方法的正确性和有效性。

**关键词:** 投影 图象重建 数值计算

## Basic Theorems and Their Numeric Computation in Image Reconstruction

Wang Weidong<sup>1</sup> Bao Shanglian<sup>2</sup>

(Biomedical Engineering Research Office, General Hospital of Chinese PLA, Beijing 100853)<sup>1</sup>

(Institute of Heavy Ion Physics, Peking University, Beijing 100871)<sup>2</sup>

**ABSTRACT :** This paper Mathematically present six basic theorems and their numerical computation methods in the field of image reconstruction. With the development of large-scale integral circuits Systolic array, the present methods for reconstructing directly images may be implemented real-time. The results of computer simulation are presented for illustrating the efficiency of the proposed methods.

**Keywords :** Projection, Image Reconstruction, Numeric Computation.

### 1 投影的定义和表达

平行束投影:  $Pf_\theta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + t\theta)dt, x \in \theta_\perp,$

扇形束投影:  $Df_a(\theta) = \int_0^{+\infty} f(a + t\theta)dt, \theta \in S^{n-1}, |a| = a_0,$

变焦束投影:  $Vf_a(\theta) = \int_0^{+\infty} f(a + t\theta)dt, \theta \in S^{n-1}, |a| = a(\theta),$

其中 $f$ 是人体介质衰减系数, 它是一个平方可积和紧支集函数。 $Pf_\theta$ 、 $Df_a$ 和 $Vf_a$ 是沿 $\theta$ 方向上的线积分,  $S^{n-1}$ 是 $n$ 维空间中的单位超球面。如图1所示。在实际应用中, 主要采用扇形束, 而平行束的扫描方式在医学影像设备中已经很少使用。变焦束投影的扫描方式主要用于单光子断层扫描(SPECT)中以提高信噪比和分辨力。

\*2001-02-18收到本文稿。

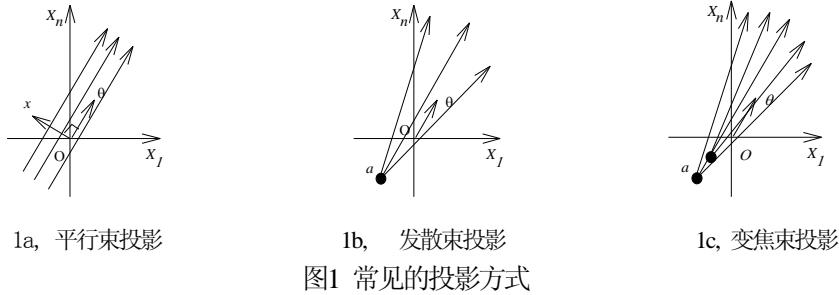


图1 常见的投影方式

## 2 图象重建的基本定理

**定义**  $\Lambda u = (n-1)C(n,1) \sum_{i=1}^n (x_i / |x|^{n-1}) * \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $C(n,\alpha) = \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)}$ , \*

其中\*表示卷积,  $u$ 存在Cauchy主值。记 $H^s$ 是s阶Sobolev空间。

**定理1** 如果 $e \in H^{1/2}$ ,  $(1+|x|)^{1-n} e \in L^1$ ,  $|\omega|^{-1} \hat{e} \in L^1_{loc}$ , 则

$$e(x) * f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^{n-1}} d\theta \int_{-\infty \sim +\infty} Pf_\theta(a) k(x-a) da,$$

其中 $k = \frac{1}{4} C(n,1) \Lambda P e_\theta$ , 它是 $\theta \in S^{n-1}$ 和 $x \in \theta^\perp$ 的函数。

**定理2** 如果 $e \in H^{3/2}$ ,  $(1+|x|)^{1-n} \Lambda e \in L^1$ , 则

$$\Lambda e(x) * f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^{n-1}} d\theta \int_{-\infty \sim +\infty} Pf_\theta(a) K(x-a) da,$$

其中 $K = -\frac{1}{4} C(n,1) \Delta P e_\theta$ ,  $\Delta$ 是拉普拉斯算子。通常有 $\Delta = -\Lambda^2$ 。

定理1, 2由K. T. Smith & F. Keinert在文献1中提出, 它们可以从Radon变换直接转换得到, 可以说, 定理1, 2 是给定核函数下的最佳近似计算。

**定理3** 如果 $e \in H^{1/2}$ ,  $(1+|x|)^{1-n} e \in L^1$ ,  $|\omega|^{-1} \hat{e} \in L^1_{loc}$ , 则

$$e(x) * f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^{n-1}} d\theta \int_A [Df_a(\theta) + Df_a(-\theta)] \langle a, \theta \rangle k(E_\theta(x-a)) da,$$

其中 $\langle , \rangle$ 表示矢量的点积,  $E_\theta$ 表示矢量在 $\theta$ 方向上的正交投影。这里 $k = \frac{1}{4a_0} C(n,1) \Lambda P e_\theta$ , 它

是 $\theta \in S^{n-1}$ 和 $x \in \theta^\perp$ 的函数,  $A$ 表示半径为 $a_0$ 的超球面。

定理4 如果  $e \in H^{3/2}$ ,  $(1+|x|)^{1-n} \Lambda e \in L^1$ , 则

$$\Lambda e(x) * f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^{n-1}} d\theta \int_A [Df_a(\theta) + Df_a(-\theta)] < a, \theta > K(E_\theta(x-a)) da ,$$

其中  $K = -\frac{1}{4a_0} C(n, 1) \Delta P e_\theta$ 。

定理3, 4由A. Faridani等人在文献2以中提出, 它们是用于扇形束的图象重建定理, 可以通过重新排序从定理1, 2直接推得。可以说, 它们与定理1, 2是等价的。

定理5 如果  $e \in H^{1/2}$ ,  $(1+|x|)^{1-n} e \in L^1$ ,  $|\omega|^{-1} \hat{e} \in L^1_{loc}$ , 则

$$e(x) * f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^{n-1}} \int_{A(\theta)} [Vf_a(\theta) + Vf_a(-\theta)] < a, \theta > k(E_\theta(x-a)) da d\theta ,$$

这里  $k = \frac{1}{4a(\theta)} C(n, 1) \Delta P e_\theta$ 。

定理6 如果  $e \in H^{3/2}$ ,  $(1+|x|)^{1-n} \Lambda e \in L^1$ , 则

$$\Lambda e(x) * f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^{n-1}} \int_{A(\theta)} [Vf_a(\theta) + Vf_a(-\theta)] < a, \theta > K(E_\theta(x-a)) da d\theta$$

其中  $K = -\frac{1}{4a(\theta)} C(n, 1) \Delta P e_\theta$ 。

定理5, 6是定理3, 4的推广, 这种推广也是通过重排实现的, 只是这种重排不仅对投影的角度重排而且需要考虑焦点的位置重排的影响。

### 3 数值计算

平行束的重建计算可以直接利用卷积背投影的方法来计算, 但是, 在发散束和变焦束重建计算中还必须重排处理才可以进行直接积分计算, 重排处理可以表示成下列两个运算, 即  $< a, \theta > = a\theta^T = |a|\cos\phi$ ,  $\phi$  是矢量  $\theta$  和  $a$  的夹角, 以及  $E_\theta = I - \theta_\perp \theta_\perp^T$ ,

$E_\theta(x-a) = (I - \theta_\perp \theta_\perp^T)(x-a)$ 。将上面两个式子代入定理3, 4, 5, 6中, 即可进行图象重建的直接计算。我们采用五个圆形的不同衰减系数镶嵌成的模型, 最大圆盘的圆心为(0,0)、半径为2和衰减系数为1, 第二个圆盘的圆心为(0,-1)、半径为0.094和衰减系数为2, 第三个圆盘的圆心为(0,-1.5)、半径为0.2和衰减系数为2, 第四个圆盘的圆心为(0,0)、半径为0.188和衰减系数为0, 最大圆盘的圆心为(0,1)、半径为0.376和衰减系数为0, 如图2(a)所示。我们计算中采用的投影数目为64, 每个投影上数据采样点为64, 这时我们计算了不同核函数重建结果, 如图2(b), (c), (d), (e)所示。

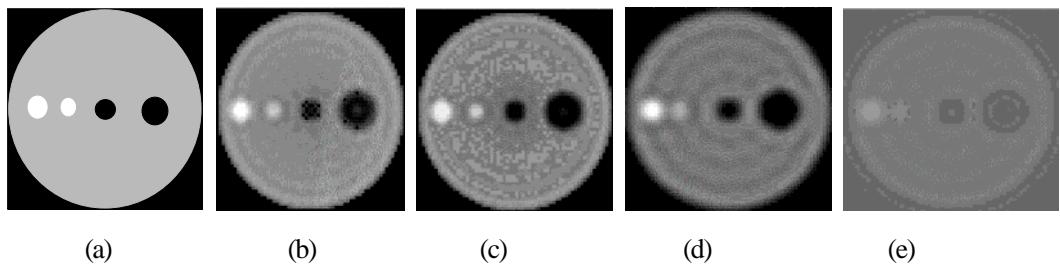


图2 计算机模拟结果。(a)仿真模型; (b)平行束; (c)平行束; (d)发散束; (e)平行束。

### 参考文献

- [1] K. T. Smith & F. Keinert . Mathematical foundation of computed tomography. Applied Optics, No. 12, 1985
- [2] A. Faridani, et al.. Local and global tomography, Signal Processing(Part II). Academic Press, Inc., 1992.

**作者简介:** 王卫东, 男, 1964-12月出生, 获北京理工大学通信与电子系统专业博士学位; 又在北京大学核物理与核技术专业博士后毕业。

现任中国人民解放军总医院生物医学工程研究室任主任、副研究员; 中国体视学会CT理论与应用专业委员会常务委员、医学物理学会会员; 中国电子学会高级会员。

曾获北京理工大学优秀论文奖, 中国电子学会优秀论文奖。

● \*