

## 扇束图像重建中 OSEM 算法及子集划分的研究

印胤, 刘力

(中国科学院高能物理研究所研发中心, 中国北京 100039)

**摘要:** 目的: 将一种快速迭代图像重建方法 OSEM 用于仿真 Phantom 模型的扇束投影数据的重建中, 验证其重建参数的有效取值范围, 分析比较不同子集选取对扇束 OSEM 重建的图像质量以及收敛速度的影响。方法: 本研究采用事先计算特定几何扇束扫描的概率矩阵和最大间距划分投影子集的方法, 选取图像大小为  $128 \times 128$ 。通过对模拟的 Phantom 扇束投影数据的重建, 结果: OSEM 重建效果好于传统滤波反投影 (FBP) 重建的结果, 尤其是在有噪声情况下, 在一定范围内重建质量与迭代次数和子集划分个数成正比, 而计算时间仅仅与迭代次数成正比。结论: 恰当地选取子集个数, 扇束 OSEM 重建可用较少迭代次数和较短的计算时间获取好的重建图像。

**关键词:** 有序子集最大期望值方法; 子集; 扇束重建; 图像

中图分类号: TP39.41 文献标识码: A

## Study of OSEM with Different Subsets in Fan Beam Reconstruction

YIN Yin and LIU Li

(Center of Research and development, Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Science, Beijing 100039, China)

**Abstract Purpose:** A fast iterative image reconstruction method OSEM (Ordered Subsets Expectation Maximization) is applied in the reconstruction of fan-beam projections of a Phantom, and the effective range of OSEM parameters (such as iterative number, subset order) is verified, and the OSEM with various subset orders are studied by comparing their reconstructive image quality and convergent speed. **Method:** The probability matrix of fan-beam geometry is calculated in advance and maximum interval between subset is assumed. **Result:** In the reconstruction of a simulated Phantom data, OSEM gives better images with higher spacial resolution and lower noise, as compared with traditional FBP method especially under noisy acquisition situation in fan-beam scanning, and in a certain extension the image quality is proportional to the product of the iterative number and the subset order, while computing time is only related to the iterative number. **Conclusion:** Good images with smaller iterative number and thus shorter time can be obtained by properly choosing the subset order in fan-beam OSEM reconstruction.

**Key words:** ordered subsets expectation; maximization; subset; fan-beam reconstruction; image

### 1 引言

在计算机断层扫描 (Computed Tomography, CT) 技术中, 采用平行束采集方式时其重建方法有解析算法和迭代算法。解析法的优点是速度快, 但当测量噪声较大或采样不充分时, 这类算法的成像效果不甚理想。迭代法最大优点之一是可以适用于各种扫描几何模式, 并可

以根据具体成像条件引入与空间几何有关的或与测量值大小有关的约束和条件因子，但是传统迭代法（如最大似然期望法：Maximum Likelihood Expectation Maximization, MLEM）收敛速度慢，运算时间长，这极大地限制了它的应用。有序子集最大期望值方法<sup>[1-2]</sup>（Ordered Subsets Expectation Maximization, OSEM）是一种改进的 MLEM 重建算法，它具有较好的重建图像质量和较短的计算时间，已广泛应用在商业 ECT（Emission Computed Tomography）的平行束重建中。扇束投影也是一种常用采集方式，同平行束采集方式一样其重建方法有解析算法（如变形滤波反投影 FBP 算法<sup>[3,4]</sup>）和迭代算法。使用 OS 技术进行加速的扇束迭代算法近来也被用于 CT 图像重建的研究中，如用以 XCT<sup>[5]</sup>中 OS-convex 算法和不对称扇束 TCT（Transmission CT，即 ECT 中的透射扫描）中的 OSEM 算法<sup>[6]</sup>。本文通过研究仿真 Phantom 模型数据就无噪声和有噪声两种情况在不同子集划分下的扇束 OSEM 重建结果，分析比较了不同子集的选取对重建的图像质量以及重建收敛速度的影响。

## 2 扇束扫描断层成像模型

考虑一个断层的扇束发射扫描模型，见图 1。测量的范围（FOV）是一个以 O 为圆心，半径为 R 的圆，S 为点 X 光源，D 为圆弧状等角间距排列的探测器阵列，以 S

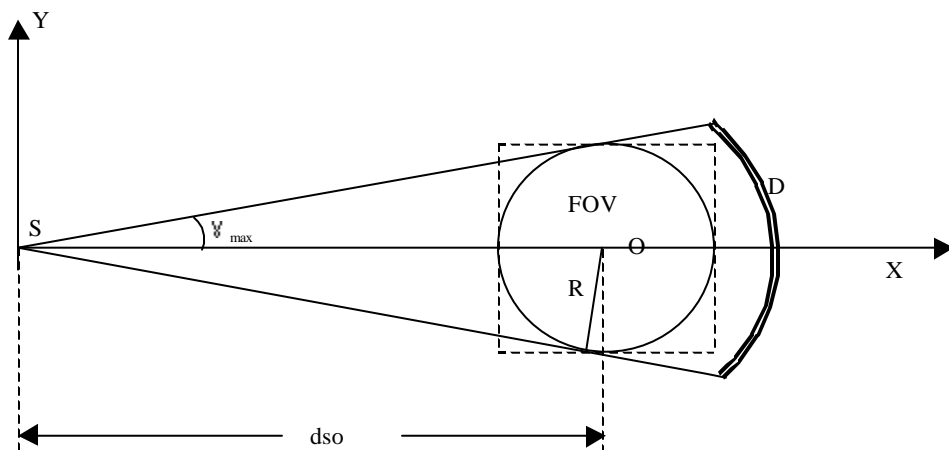


图 1 一个断层的扇束扫描示意图

为其圆心。设扇束完全覆盖 FOV， $\theta_{max}$  为扇束最大夹角的 1/2，整个系统保持物体不动，光源—探测器系统绕 O 点进行 360° 旋转采样。

设被测图像的大小为  $128 \times 128$  像素，即  $f(128 \times 128)$ ，其方形内切圆即为 FOV。在 FOV 以外的部分像素值为 0。假设有  $M$  个探测单元（bin）（即每扇束内采样射束的个数），扇束转动采样个数为  $N$ ，于是成像方程为：

$$d(n, m) = \sum_{i, j} P(i, j, n, m) f(i, j) \quad (1)$$

$i, j = 1, 2, 3, \dots, 128$  为图像像素指标;  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  为扇束指标;

$m = 1, 2, 3, \dots, M$  为 bin 指标; 其中  $d(n, m)$  代表第  $n$  扇束中第  $m$  条射线（落入第  $m$  个 bin）

的测量值, 在 CT 中, 这就是  $\ln(I_0(n,m)/I(n,m))$ ,  $I_0(n,m)$  和  $I(n,m)$  分别是被测物放入前后的相应探测器计数值;  $f(i, j)$  为像素值, 在 CT 中,  $f$  即为密度分布。  $P(i, j, n, m)$  为第  $(i, j)$  像素在第  $n$  扇束时对第  $m$  个 bin 的 (衰减) 贡献因子, 它近似正比于射线  $(n, m)$  穿过  $(i, j)$  的平均长度, 是事先算出的。

### 3 OSEM 迭代算法

由于是以统计规律为基础, 传统的 MLEM 重建法具有很好的抗噪声能力, 尤其是在处理统计性差的数据时, 更能显示出它相对于解析法的优越性。但是这种方法存在迭代法的运算量大, 运算时间长的缺点, 这极大地限制了它的应用, 尤其是在 CT 图像重建中的应用。为了加快收敛速度, 减少运算时间, 人们提出了很多快速算法, 其中 OSEM 是很有应用前景的一种快速迭代重建算法, 它是在最大似然期望法 MLEM 的基础上发展起来的。

传统的 MLEM 方法计算式为<sup>[7]</sup>:

$$f^{(k)}(i, j) = \frac{f^{(k-1)}(i, j)}{\sum_{n, m} p(i, j, n, m)} \sum_{n, m} \frac{p(i, j, n, m) d(n, m)}{\sum_{i', j'} p(i', j', n, m) f^{(k-1)}(i', j')} \quad (2)$$

其中  $k$  为迭代次数。MLEM 方法旨在寻找与测量的投影数据具有最大似然性 (ML) 的估计解, 其迭代过程是由最大期望值算法 (EM) 来实现的。

OSEM 方法属于 ‘块’ 迭代法中的一种<sup>[1-2]</sup>, 在每一次迭代过程中将投影数据分成  $L$  个子集, 每一个子集对重建图像各像素点值校正以后, 重建图像便被更新一次, 所有的子集运算一遍, 称为一次迭代过程。在 MLEM 方法一次迭代过程中, 使用所有的投影数据对重建图像每一个像素点的值进行校正, 重建图像被更新一次, 而在 OSEM 方法一次迭代过程中重建图像被更新  $L$  次, 所以 OSEM 方法具有加快收敛的作用。

令  $\hat{f}^0$  为初始图像,  $\hat{f}^k$  为  $k$  次迭代后的图像,  $d_1, d_2, \dots, d_L$  为全部投影数据划分而成的有序子集, 具体算法如下:

- (i)  $k = 0$ , 初始化  $\hat{f}^k$ 。
- (ii) 重复下面步骤直到迭代到指定迭代次数为止。

a)  $f^1 = \hat{f}^k, k = k + 1$ ;

b) 对子集  $l = 1, \dots, L$  计算投影: 计算重建图像在每个子集  $d_l$  对应的投影角度  $n$  探测器  $m$

$$\text{上的期望投影值 } \hat{d}^l: \hat{d}^l(n, m) = \sum_{i, j} p(i, j, n, m) f^l(i, j) \quad (3)$$

$$n, m \in d_l$$

反投影：对每一个像素计算

$$f^{l+1}(i, j) = f^l(i, j) \sum_{n, m \in d_l} \frac{d_l p(i, j, n, m)}{\hat{d}^l(n, m)} \bigg/ \sum_{n, m \in d_l} p(i, j, n, m) \quad (4)$$

$$c) \hat{f}^k = f^{L+1}.$$

式(4)中对  $n, m$  的求和是在第  $l$  个子集内进行的。

OSEM 算法中子集的选取和划分有很多种，将扇束投影矩阵按行划分，也就是选取不同扇束数据分组进行重建。例如当总扇束采样个数为 400 时，取  $L=80$ ，则第一子集选取第 1, 81, 161, 241, 321 个扇束下的投影集合，第二子集为第 2, 82, 162, 242, 322 个扇束下的投影集合，如此等等。这样保证每一次子迭代都最大限度地使用间距较远的投影。此外，子集个数为总投影角度数目的因数，保证每子集的总计数大致相等。

#### 4 无噪声仿真数据的重建

首先类似 Jaszczak 模型<sup>[8]</sup>，构造一个  $128 \times 128$  的仿真 Phantom 切片，在其中圆形区域分布着大小不等的点状高密度物体，其最大值为 0.7 (相对单位)，均匀本底计数为 0.1，最小颗粒为 1 个像素。选取观测角度个数为 400，探测器的个数为 128，扇角之半  $g_{\max}$  取为  $15^\circ$ 。

Phantom 原图及其扇束投影数据 (sino 图) 见图 2(a)(d)

为便于对比，我们做出无噪声和有噪声两种情况下 FBP-Ramp (无平滑窗) 的重建结果，见图 2(b)(c)。模拟采样为  $N=400$ ， $M=128$ ，这种采样水平是完备的<sup>[9]</sup>，事实上在无噪声模拟数据的 FBP-Ramp 解中，最小颗粒可分清，见图 2(b)。当投影数据有噪声时，FBP 重建有较多的噪声伪影并且最小颗粒的分辨受到影响，见图 2(c)。

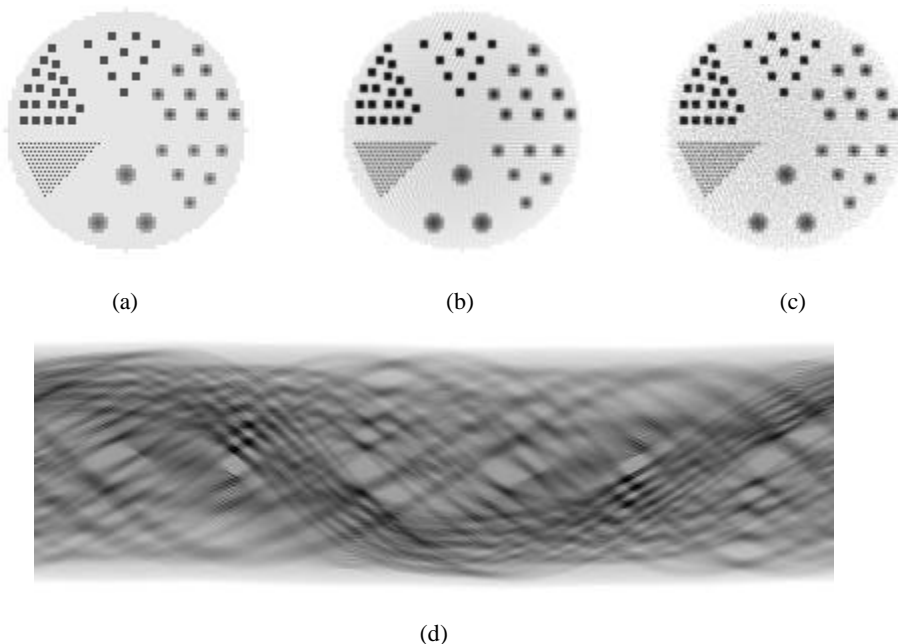


图 2 计算机模拟 2D Phantom 原图(a)，无噪声和有噪声 FBP\_Ramp 重建结果(b)(c)，及原图投影数据(d)

将投影矩阵按观测角度分别划分为 1, 10, 20, 40, 80, 400 个子集, 1 个子集情况下的 OSEM 重建就是传统的 MLEM 算法。图 3 (a) ~ (f) 分别为六种子集划分方法经过一次迭代后的重建图像, 图 4 (a) ~ (f) 为六种情况下分别经过 400, 40, 20, 10, 5, 1 次迭代后的重建结果。

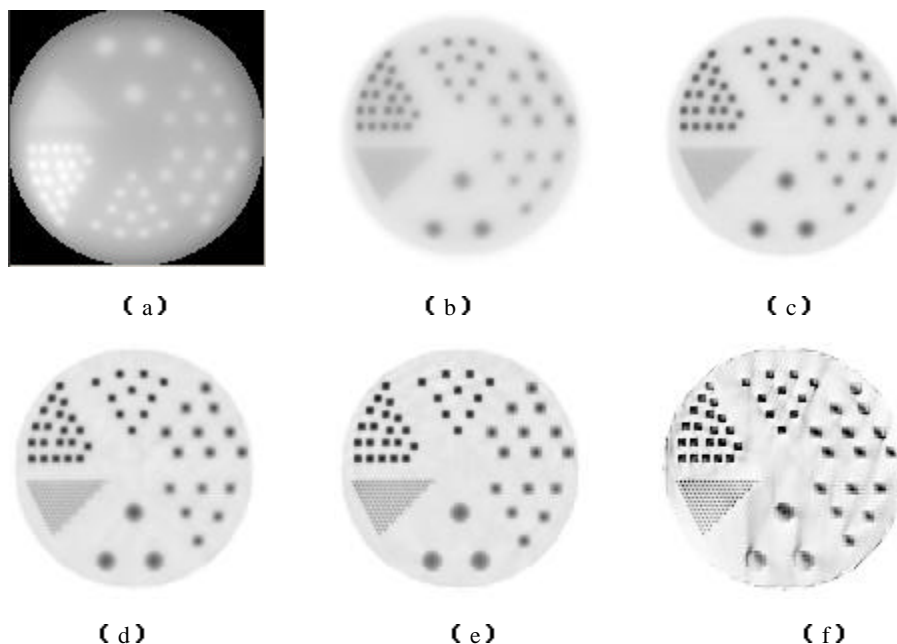


图 3 六种子集划分情况下一次迭代重建结果: (a) 子集数为 1 (b) 子集数为 10 (c) 子集数为 20 (d) 子集数为 40 (e) 子集数为 80 (f) 子集数为 400

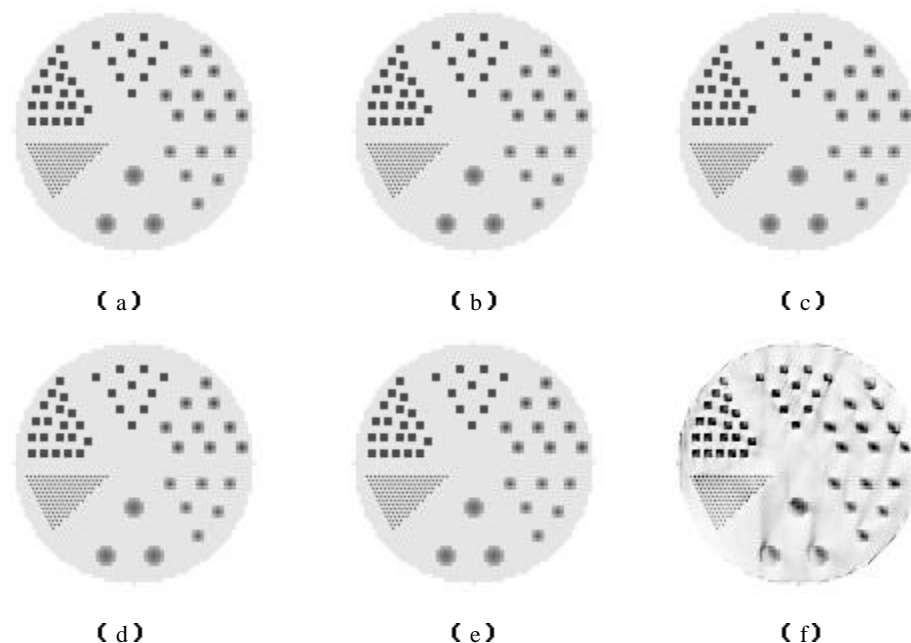


图 4 六种子集划分情况下不同迭代次数重建结果: (a) 子集数为 1, 迭代 400 次 (b) 子集数为 10, 迭代 40 次 (c) 子集数为 20, 迭代 20 次 (d) 子集数为 40, 迭代 10 次 (e) 子集数为 80, 迭代 5 次 (f) 子集数为 400, 迭代 1 次

从图 3 结果可以看出, 就一次迭代而言, 子集数越大, 重建图像中高频信号恢复得越快。即在相同迭代次数下, 子集划分个数增加, 图像质量明显改善。从图 4 结果可以看出, 无论投影数据被划分为多少个子集, 只要子集划分个数与迭代次数的乘积确定, OSEM 重建图像质量大致相同。若要得到近似同等质量的重建图像, 当子集划分个数增加, 则迭代次数就可以减少。但在子集个数太大, 如  $L=400$  时, 重建图像在迭代次数较少的情况下质量会变差, 如图 3(f) 和图 4(f) 所示。在图 4 中, 除图 4(f) 以外, OSEM 成像质量均好于 FBP (图 2(b)), 即具有较高的空间分辨和较少的噪声伪影。

由于 OSEM 的一次迭代定义为所有的子集全部参与了校正, 所以无论将投影数据划分为多少个子集, 其一次迭代运算量大致一样, 但是, 采用不同子集数目的迭代收敛速度 (关于迭代次数) 却大不一样。为了比较不同子集划分对图像重建收敛速度的影响, 我们定义参数  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{d}(k) = 4 \sum_{i,j} [f^k(i,j) - f_0(i,j)]^2 / 128^2 \mathbf{p} \quad (5)$$

$k$  为迭代次数,  $f_0$  是原始模型, 图 5 是 Phantom 模型数据在不同子集划分重建过程中参数  $\mathbf{d}$  随迭代次数的变化曲线, 并同时标出了 FBP\_Ramp 的结果供参考对比。为了清楚的看到不同子集收敛的情况, 我们在图中取了  $\mathbf{d}$  的对数坐标。

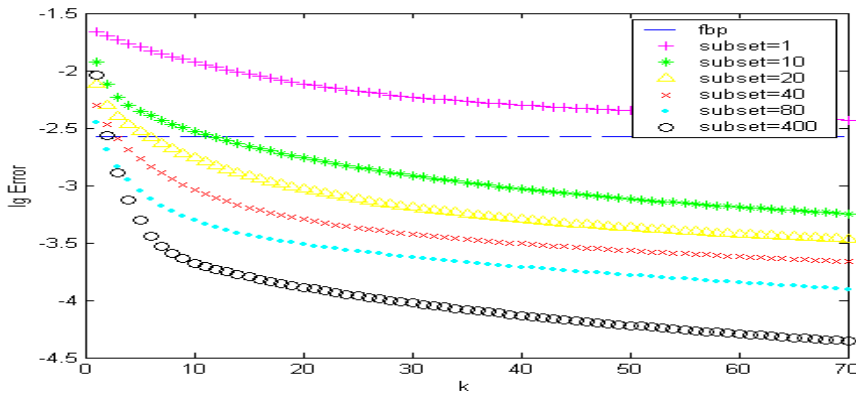


图 5 参数  $\mathbf{d}$  ~ 迭代次数  $k$  曲线

从图 5 中可以看出, 子集越多 OSEM 的收敛速度越快, 达到最小  $\mathbf{d}$  值所需迭代次数也逐渐减少, 收敛时的  $\mathbf{d}$  也更小, 且图像质量基本上由  $k$  与  $L$  的乘积决定。在无噪声的理想情况下,  $L=400$  时, 虽然前几次迭代图像质量较差, 甚至出现变形, 但之后其收敛速度最快, 收敛时的  $\mathbf{d}$  值最小。

## 5 有噪声的模拟扇束投影数据的重建

有噪声 CT 扇束投影数据由如下方法提供:

在 CT 中, 投影数据  $d(n,m)$  就是  $\ln(I_0(n,m)/I(n,m))$ , 假定  $I_0$  和  $I$  都是遵从 Poisson

分布的统计物理量, 其统计涨落 (统计噪声) 分别为  $\sqrt{I_0}$  和  $\sqrt{I}$ , 相对误差分别为  $\frac{1}{\sqrt{I_0}}$  和

$\frac{1}{\sqrt{I}}$ 。例如  $\overline{I_0} = 1000$ , 则关于  $I_0$  的测量统计偏差约为  $\sqrt{1000} = 31.6$ , 即约有 3% 的涨落, 这是个不小的误差, 通过重建, 这种统计噪声将影响整个图像, 造成图像中的噪声伪影加重, 影响对尺寸小的点状物的分辨。下面取  $\overline{I_0} = 1000$  (计数) (空载时, 即被测物体没有放入时),  $I_{\min} = 50$  (物体放入时的最小测量计数), 以上是一个典型的 CT 低计数测量数值, 由关系式  $d(n, m) = \ln(I_0(n, m)/I(n, m))$  知投影数据  $d$  也有了涨落, 对此有噪声的投影数据进行 OSEM 的重建, 在相同的重建时间下 (即迭代次数  $k$  相同) 其结果如图 6 所示。

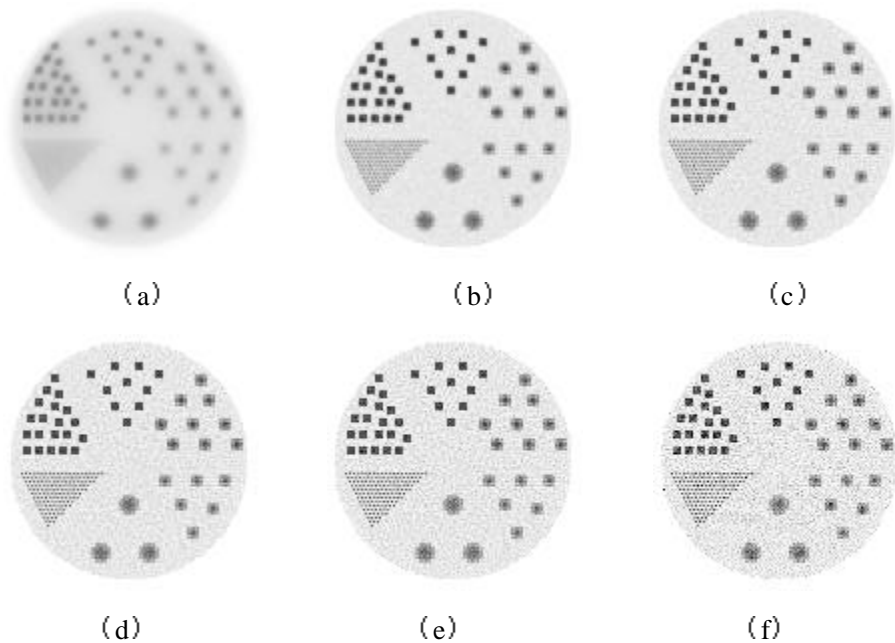


图 6 有噪声投影数据 10 次迭代的重建结果:(a) 子集数为 1 (b) 子集数为 10  
(c) 子集数为 20 (d) 子集数为 40 (e) 子集数为 80 (f) 子集数为 400

从上图可以看出, 有噪声的情况下, 对同样的计算时间, 相同的迭代次数, 虽然子集划分较多时可提高图像的分辨率, 但过多的子集会使图像中噪声很明显。这主要是因为子集数较多时, 每次子迭代所用的有效投影数过少, 造成噪声被过分放大的结果。选用合适的子集个数和迭代次数, OSEM 重建结果均好于 FBP (对比图 6(c) (d) 与图 2(c))。

同样做出参数  $d$  随迭代次数变化的曲线如图 7 可以看到, 由于噪声的存在, 使得无法用增加迭代次数的办法减少重建图像误差, 多次迭代甚至使  $d$  更大 (在  $L=400$  时此现象尤为明显)。这说明在实际应用时, 子集数和迭代次数不是越多越好。

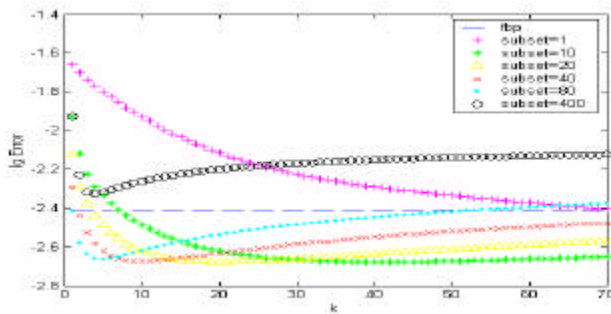


图 7 参数  $d$  ~迭代次数  $k$  曲线

## 6 结论与讨论

由上述对扇束投影数据重建分析可知, 在无噪声的情况下, 子集划分个数增加, 迭代收敛速度增加, 所需迭代次数减少, 且图像质量近似由子集划分个数和迭代次数的乘积确定 (在子集个数不太多时)。但在有噪声的情况下, 图像的噪声随子集划分个数的增多而有不同程度的放大, 严重时还可能导致迭代的不收敛。所以, 子集的个数和图像重建质量之间存在均衡关系<sup>[10]</sup>, 选择合适的子集和迭代次数, 才能在提高运算速度的同时, 得到好的图像质量。

目前在国外 ECT 及其升级软件中都含有 OSEM 重建算法, 由于 OSEM 算法在保证成像质量的同时可以大大减少运算时间, OSEM 在扇束的图像重建中具有广阔的应用前景。恰当的选取子集个数, 可用较少的 OSEM 迭代运算获得图像质量好于 FBP 的重建结果, 所花费的运算时间并不比 FBP 法多出许多。此外, 由于迭代法可以合并一些校正计算, 使得选用迭代法重建更有效、更划的来。因此, OSEM 迭代法将同 FBP 法一起, 成为核医学和 X-射线断层影像设备的主流重建算法。

## 参考文献:

- [1] Hudson H.M., Larkin R.S. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data[J]. IEEE Transaction on Medical Imaging. 1994,13(4):601~609.
- [2] Schmidlin P, Matthias E B, Gunnar B. Subsets and overrelaxation in iterative image reconstruction[J]. Physics in Medicine and Biology. 1999,44(5):1384~1396.
- [3] 庄天戈. CT 原理与算法[M]. 上海:上海交通大学出版社, 1992.
- [4] Kak A C, Slaney M. Principles of computerized tomographic imaging [M]. New York: IEEE Press, 1988:75~86.
- [5] Beekman F J, Kamphuis C. Ordered subset reconstruction for x-ray CT [J]. Physics in Medicine and Biology. 2001,46(7):1838~1844.
- [6] Gilland D R, Jaszczak R J, Coleman R E. Transmission CT reconstruction for offset fan beam collimation [J]. IEEE Transaction on Nuclear Science. 2000,47(4):1602~1606.
- [7] Shepp L.A, Vardi Y. Maximum Likelihood Reconstruction in Emission Tomography[J]. IEEE Transaction Medical Imaging.1982, MI-1(2):113~122.
- [8] Wallis J W, Miller T R. Rapidly converging iterative reconstruction algorithms in Single-Photon Emission Computed Tomography[J]. Journal of Nuclear Medicine. 1993,34(10):1793~1800.
- [9] Joseph P M, R A Schulz. View sampling requirements in fan beam computed tomography [J]. Medical Physics.1980,7(6):692~703.
- [10] 吴朝霞, 刘力, 柴新禹等. 基于不同子集的 OSEM 快速迭代重建算法研究[J]. 仪器仪表学报, 2002,23 (4):408~410.

作者简介: 印 胤(1979-), 男, 2002 年获北京工业大学电子工程系学士学位, 现任中国科学院高能物理研究所工程师, 主要从事图像重建的算法研究; 已发表相关研究领域论文一篇为“正电子断层扫描仪 PET 与 PET 图像重建简介”, 《CT 理论与应用研究》, 2003, 12 (1): 47~50。