

文章编号: 1004-4140 (2008) 04-0015-08

## 基于改进正则化方法的有限角度 CT 图像重建算法

王浩, 卢孝强, 孙怡

(大连理工大学 电信学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 本文提出了一种基于改进正则化方法的有限角度 CT 图像重建算法。该算法基于同伦映射的思想, 改进了 Tikhonov 正则化方法。对于算法中的正则化参数, 引入了一种下降速率可调的连续参数修正方法, 有效地避免了由于试探正则化参数而带来的不便, 从而提高了求解效率。实验结果表明, 该方法可以快速地确定在该种条件下最优的正则化参数, 进而得到较好的重建结果。

**关键词:** 有限角度; 图像重建; 同伦映射; 正则化

**中图分类号:** TP 391.41      **文献标识码:** A

计算机断层成像 (Computed Tomography, CT) 技术现在已被广泛应用于医学诊断、工业无损检测以及安全检查等领域。CT 技术是通过物体进行不同角度下的射线投影测量而获取物体横截面信息的成像技术, 已经证明, 由完全投影数据可以惟一重建图像<sup>[1]</sup>。但是, 在实际应用中, 受检测环境、检测时间以及检测成本等的限制, 常常不可能获得完整的投影数据。因此, 研究不完全投影情况下的 CT 图像重建算法, 具有十分重要的实用价值。

不完全数据成像中, 大部分都涉及到有限角度图像重建的问题。如果扫描角度小于 180 度, 则对其投影数据的重建就属于有限角度重建。现有的 CT 重建算法主要包括解析重建法和迭代重建法两类。滤波反投影重建算法就属于第一类, 其理论基础是中心切片定理, 但是由于上述算法本身的非局部性, 不适合有限角度 CT 重建; 迭代重建法中比较经典的算法是 ART (Algebraic Reconstruction Techniques) 算法, 该类算法可以提高图像的重建质量, 但同时降低了成像速度, 虽然近些年来计算机硬件有了突飞猛进的发展, 但是该类算法仍不能够完全满足人们对图像重建速度的要求。

从数学角度来分析, CT 中的有限角度重建问题相当于求解一个欠定的代数方程组, 属于不适定问题研究范畴, 解决这类问题通常需要引入正则化方法。正则化方法是求解反问题的一种有效方法, 该类方法通过引入正则化参数以及镇定泛函将目标泛函连续化, 从而得到解的一个稳定近似, 即正则解。但是该类方法中正则参数一般不易确定, 通常需要通过多组实验观察才能得出, 即便这样, 得到的参数也往往不是最优的。鉴于此, 本文基于同伦映射的思想<sup>[2]</sup>, 构造了同伦映射函数, 将正则参数 (即同伦参数) 限制在 (0, 1) 之间。此外, 引入了一种步长可调的连续正则化参数修正方法<sup>[3]</sup>, 有效地避免了由于试探正则化参数而带来的不便, 从而提高了求解效率。

**收稿日期:** 2008-09-01。

**基金项目:** 教育部科学技术研究重点项目 (107032)。

## 1 算法基本原理

### 1.1 有限角度 CT 重建的数学模型

CT 重建的数学模型可归结为:

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{x} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{p}$  为测量得到的投影数据,  $\mathbf{R}$  为投影系统矩阵,  $\mathbf{x}$  为待重建物体。下面说明该式的具体创建过程。

对于待重建物体  $\mathbf{x}$ , 其中任一像素  $j$  对某一射线  $i$  的投影贡献为<sup>[4]</sup>:

$$p_{ij} = r_{ij} x_j \quad (2)$$

其中,  $x_j$  表示待重建物体的第  $j$  个像素;  $p_{ij}$  表示像素  $j$  对射线  $i$  的射线投影贡献;  $r_{ij}$  表示像素  $j$  对射线  $i$  的权值贡献, 其定义如下:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{射线 } i \text{ 通过像素 } j \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

射线  $i$  还经过其他像素, 其总的射线投影为:

$$p_i = \sum_j p_{ij} = \sum_j r_{ij} x_j \quad (4)$$

$p_i$  为射线  $i$  穿过物体后在探测器上得到的投影值。下面的例子直观地说明了上述过程。

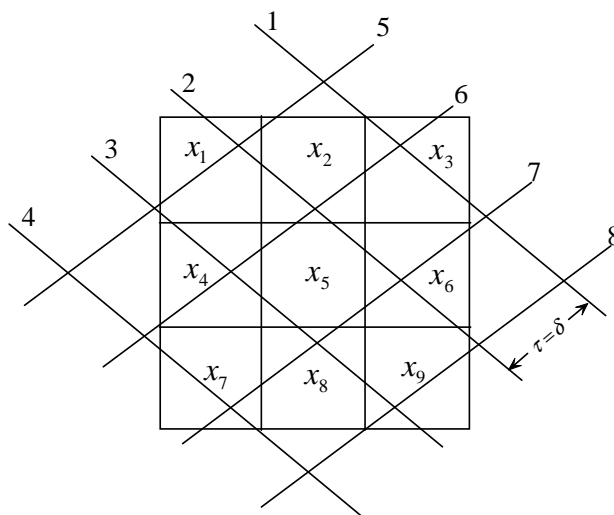


图 1  $3 \times 3$  像素图像的射线投影

图 1 表示一  $3 \times 3$  像素的图像。  $x_1, x_2, \dots, x_9$  为相应的像素值, 1~8 表示 8 条射线。由图 1 可见各投影值为:

$$\begin{cases} p_1 = r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \cdots + r_{19}x_9 = x_3 \\ p_2 = r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + \cdots + r_{29}x_9 = x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_9 \\ p_3 = r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + \cdots + r_{39}x_9 = x_1 + x_4 + x_5 + x_8 + x_9 \\ p_4 = r_{41}x_1 + r_{42}x_2 + \cdots + r_{49}x_9 = x_7 \\ p_5 = r_{51}x_1 + r_{52}x_2 + \cdots + r_{59}x_9 = x_1 + x_2 \\ p_6 = r_{61}x_1 + r_{62}x_2 + \cdots + r_{69}x_9 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ p_7 = r_{71}x_1 + r_{72}x_2 + \cdots + r_{79}x_9 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \\ p_8 = r_{81}x_1 + r_{82}x_2 + \cdots + r_{89}x_9 = x_9 \end{cases} \quad (5)$$

上式可写成更简洁的形式：

$$p_i = \sum_{j=1}^9 r_{ij} x_j \quad i=1, 2, \dots, 8 \quad (6)$$

或用矩阵表示为：

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (7)$$

式中：

$$\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_8]^T, \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_9]^T, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{19} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{29} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{81} & r_{82} & \cdots & r_{89} \end{bmatrix}$$

把它们推广到  $J$  个像素  $I$  条射线的一般情况。此时， $\mathbf{x}$  为含有  $J$  个元素的列向量，称图像矢量； $\mathbf{p}$  为含有  $I$  个元素的列向量，称测量矢量； $\mathbf{R}$  为  $I$  行  $J$  列矩阵，称投影系统矩阵。

有限角度 CT 图像重建问题属于不适定问题研究范畴。因此，在有限角度下重建图像的困难在于：

- 1) 一般像素数目  $J$  及射线数目  $I$  都极大，在迭代过程中运算量很大。
- 2) 在很多情况下投影数据的个数  $I$  远小于未知像素数  $J$ ，式 (7) 是个欠定方程，于是有无穷多个解。
- 3) 实际情况下，测量误差不可避免，噪声影响也不可忽视。于是，式 (7) 所示方程可能无解。这时必须计及误差，并估计一组解，使它在某一最优准则下达到最佳。

故对式 (7) 作如下修正：

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (8)$$

这里， $\mathbf{e}$  为误差矢量。

因此，在有限角度下重建图像问题可归结为：根据有限角度下获得的带有噪声的测量矢量  $\mathbf{p}$ ，利用式 (8) 估计图像矢量  $\mathbf{x}$ 。

## 1.2 有限角度 CT 重建的正则化求解

一般将参量  $\mathbf{x}$  的求解问题转化为求如下最优化问题，求得该问题的最优解即为我们所需要的解。即：

$$\min J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \quad (9)$$

其中， $\|\cdot\|$  为某范数，例如 2 范数。

一般来说，式 (9) 是不适定的，解决这类问题通常需要引入正则化方法，而 Tikhonov 正则化<sup>[5]</sup>是其中一种有效的求解方法。该类正则化方法对于给定的正则化参数使下面的函数达到最小：

$$M = \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 + \alpha \|\mathbf{x}\|^2 \quad (10)$$

其中， $\alpha$  为正则化参数， $\|\cdot\|$  表示 2 范数。

(10) 式对  $\mathbf{x}$  求导，并令导数等于零，可得：

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{R}^*(\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}) + 2\alpha\mathbf{x} = 0 \quad (11)$$

其中， $\mathbf{R}^*$  表示对  $\mathbf{R}$  取共轭转置。整理得：

$$(\mathbf{R}^*\mathbf{R} + \alpha\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{R}^*\mathbf{p} \quad (12)$$

则可得正则解：

$$\mathbf{x} = (\mathbf{R}^*\mathbf{R} + \alpha\mathbf{I})^{-1} \mathbf{R}^*\mathbf{p} \quad (13)$$

从 (13) 式可以看出，要想求得  $\mathbf{x}$ ，必须先给定正则化参数  $\alpha$ 。但是，相对理想的  $\alpha$  并不易得到。实际重建过程中，为了得到比较理想的重建结果，一般需要通过多组实验观察比较，才能最终确定  $\alpha$ ，但即便这样，得到的正则化参数  $\alpha$  也往往不是最优的。

## 1.3 同伦方法的引入

同伦思想用数学语言描述如下：

设  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  是  $\mathbf{R}^n$  的非空子集， $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ， $f, g \in \mathbf{Y}$ ， $f, g$  是关于  $\mathbf{x}$  的函数； $f, g: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  是光滑映射。对于任意  $\lambda \in [0, 1]$ ，定义  $(\lambda, \mathbf{x}) \in [0, 1] \times \mathbf{X}$ ，此时构造函数  $H(\lambda, \mathbf{x}) = (1 - \lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x})$ 。如果对于任意  $(\lambda, \mathbf{x}) \in [0, 1] \times \mathbf{X}$ ， $H(\lambda, \mathbf{x}) \in \mathbf{Y}$  总成立，则称光滑映射  $H: [0, 1] \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  是  $f$  和  $g$  之间的一个线性同伦。其中， $\lambda$  为同伦参数<sup>[2]</sup>。

上述思想可直观理解如下，若需要求解的原方程为：

$$f(\mathbf{x}) = 0 \quad (14)$$

应用同伦思想求解式 (14)，可构造原问题的同伦函数：

$$H(\lambda, x) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x) \quad (15)$$

其中,  $\lambda$  为同伦参数,  $\lambda \in [0, 1]$ 。显然, 当  $\lambda$  为 0 时, 式 (15) 完全对应于式 (14); 当  $\lambda$  为 1 时, 式 (15) 对应于一个简单的函数  $g(x)$ 。若从式 (15) 出发, 在求解过程中按照某种方式不断减小  $\lambda$  的数值, 最终总可以求得原式 (14) 的解。

根据上述思路, 将 (10) 式作不动点同伦修正为:

$$H(\lambda, x) = (1 - \lambda)\|Rx - p\|^2 + \lambda\|x\|^2 \quad (16)$$

仿照上述推导 Tikhonov 正则化解的过程, 可求得 (16) 式的正则解为:

$$x = [(1 - \lambda)R^*R + \lambda I]^{-1}(1 - \lambda)R^*p \quad (17)$$

式中的  $\lambda$  为同伦参数。对比式 (16) 和式 (10), 我们可以发现式 (10) 中的正则化参数  $\alpha$  与式 (16) 中的同伦参数  $\lambda$  有着十分明显的对应关系。因此, 我们可以把二者等价起来。

#### 1.4 正则化参数的选取

在正则化方法中, 如何适当地选择正则化参数 (同伦参数) 是一个非常关键的问题。考虑到同伦映射, 该正则化参数即同伦参数需要从 1 或接近 1 的数逐渐朝 0 的方向减小。在迭代开始阶段, 该参数应该选择较大, 以保证求解的稳定进行, 避免由于问题的病态而引起的不稳定。而随着迭代的进行, 该参数应逐渐减小, 以使得式 (16) 不断地逼近式 (9)。故基于同伦映射的思想构造的正则化函数, 其正则化参数的选取应遵循以下两个原则:

1) 正则化参数即同伦参数被界定于  $[0, 1]$  之间, 这样正则化参数的初值可以选择 1 或者小于 1 的数值, 在迭代中按照某种方式稳定地下降。

2) 正则化参数的最终取值为接近于零的数值。

根据以上两条原则, 我们参考人工神经网络的非线性作用函数, 即 Sigmoid 函数:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (18)$$

引入如下连续正则化参数的调整公式:

$$\lambda(N) = \frac{1}{1 + e^{-\beta(N_0 - N)}} \quad (19)$$

其中,  $N$  为迭代步数,  $\lambda(N)$  为第  $N$  步迭代时正则化参数的取值,  $\beta$  为下降速率参数,  $N_0$  为初值选取参数。该函数的函数值在  $(0, 1)$  之间, 并且在正无穷大方向趋近于 0, 而不等于 0。

这里有两个可调参数, 即  $\beta$  和  $N_0$ 。其中  $\beta$  用于调整正则化参数的下降速率。该参数取值越大, 正则化参数的下降速度越快, 一般建议该参数取为 0.5 左右的数值。参数  $N_0$  为迭代初值, 一般可以选为 0~5 之间的整数。

## 2 实验结果分析

我们以经典的 Shepp-Logan 头模型作为研究对象, 用本文介绍的方法和 Tikhonov 正则化方法分别对模拟的投影数据进行了重建。在利用模拟的投影数据进行重建的过程中, 主

要参数选取如下：增强器直径长度 140 mm，射线源到物体转轴中心距离 400 mm，射线源到探测器中心距离 1 000 mm。我们以间隔为  $1^\circ$  的 60 个扫描角度下的投影数据为例进行重建，待重建图像分辨率取为  $64 \times 64$ 。利用 Tikhonov 正则化方法，正则化参数  $\alpha$  分别取为 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2 时进行重建，其结果如图 2 所示；用本文介绍的方法重建图像，取  $\beta = 0.5$ ， $N_0 = 0$ ，重建结果如图 3 所示。

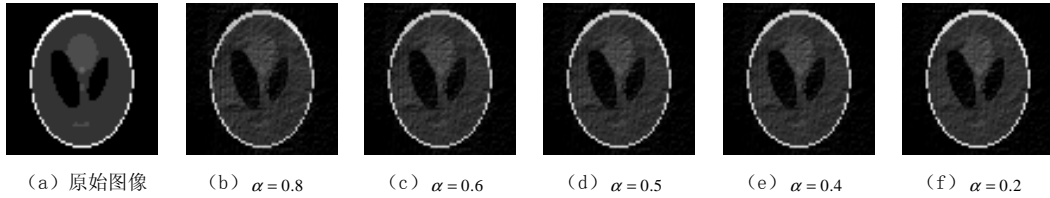


图 2 Tikhonov 正则化方法  $\alpha$  不同取值时的重建结果



图 3 本文方法重建结果 ( $\beta = 0.5$ ,  $N_0 = 0$ )

为了方便地评价图像重建的质量，定义均方误差函数如下：

$$MSE(k) = \frac{\sum_i \sum_j (\tilde{x}_{ij}^k - x_{ij})^2}{\sum_i \sum_j x_{ij}^2} \quad (20)$$

其中， $x_{ij}$  表示真实图像某点的灰度值， $\tilde{x}_{ij}^k$  表示第  $k$  次迭代后重建图像中对应点的灰度值。需要说明的是，均方误差评价标准只能在模拟实验中应用。当使用真实投影数据进行重建时，由于  $x_{ij}$  未知，该误差函数不能应用，需要采用其他的评价标准。

用本文介绍的方法重建图像，令  $\beta = 0.5$ ， $N_0 = 0$ 。从  $N = 1$  开始，利用 (19) 式计算出  $\lambda(N)$  值，将其代入 (17) 式计算图像矢量  $\mathbf{x}$ ，此时的 MSE 值可根据式 (20) 求得。之后， $N$  加 1，继续上述过

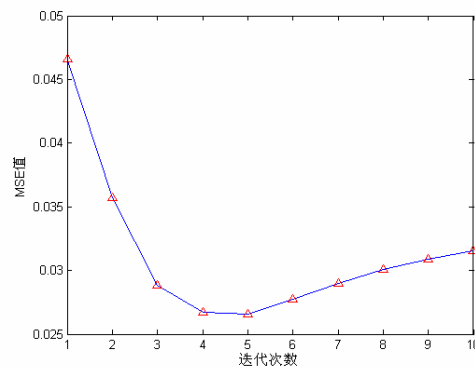


图 4 均方误差函数曲线

程。图 4 为  $N=10$  时通过上述过程自动调整正则化参数绘制的均方误差函数曲线。其中，横坐标表示迭代次数，纵坐标表示迭代过程中的均方误差值。从图中可以看出，经过 5 次迭代便可以得到我们所需要的结果。

利用式 (20) 所示误差函数进行图像质量评价，用本文方法进行图像重建，所得结果的 MSE 值为 0.026 6。用 Tikhonov 正则化方法进行图像重建，为了得到较好的重建结果，需要通过多组实验观察来选取较优的正则化参数  $\alpha$ ，该过程比较费时。本实验中， $\alpha$  分别取为 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2，所得结果的 MSE 值见表 1。从表中可以看出，这几种情况下重建结果的 MSE 值均不如本文介绍的方法。

表 1 Tikhonov 正则化方法在  $\alpha$  不同取值时的 MSE 值

$\alpha$	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2
MSE	0.054 6	0.046 3	0.041 7	0.037 2	0.028 2

### 3 结论

本文基于同伦映射思想，构造了新型的正则化函数，并引入了连续的正则化参数调整方式，避免了正则化参数的盲目选择，可以较快地选择到相对最优的正则化参数，进而得到了较好的重建图像。可以看出，该方法为实际应用提供了一种较好的解决方案。

### 参考文献

- [1] Deans S R. The radon transform and some of its applications[M]. New York: John Wiley, 1983.
- [2] 王则柯, 高堂安. 同伦方法引论[M]. 重庆: 重庆出版社, 1990.
- [3] 崔凯, 杨国伟, 李兴斯, 等. 用同伦方法反演非饱和土中溶质迁移参数[J]. 力学学报, 2005, 37(3), 307-312.
- [4] 庄天戈. CT 原理与算法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1992.
- [5] Tikhonov A, Arsenin V. Solutions of ill-posed problems[M]. New York: John Wiley, 1977.

## CT Reconstruction Algorithm from Limited-angle Using Modified Regularization Method

WANG Hao, LU Xiao-qiang, SUN Yi

School of Electronic and Information Engineering,  
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

**Abstract:** In this paper, a modified Tikhonov regularization CT image reconstruction algorithm from limited-angle was proposed. The modified Tikhonov regularization method adopted homotopy mapping to adjust the regularization parameter continuously, which increased the efficiency of computation procedure by avoiding

the attempt of the regularization parameter. Experimental results show that the proposed algorithm improved the quality of reconstruction image by fixing on the optimization parameter rapidly.

**Key words:** limited-angle; image reconstruction; homotopy mapping; regularization

**作者简介:** 王浩 (1983—), 男, 大连理工大学电信学院信号与信息处理专业硕士研究生, 主要从事有限角度 CT 重建以及 CT 局部重建等方面的研究, Tel: 0411-84707849, E-mail: wh02052522@163.com; 孙怡 (1964—), 女, 大连理工大学教授, 博士生导师, 主要从事光电信息检测、图像处理与模式识别等方面的研究, Tel: 0411-84707849, E-mail: lslwf@dlut.edu.cn。