

文章编号: 1004-4140 (2007) 04-0008-14

统计重建算法综述

王振天, 张丽, 邢宇翔, 康克军

(清华大学 工程物理系, 北京 100084)

摘要: 本文主要综述应用于 PET/SPECT 领域的统计重建算法, 介绍统计重建算法发展的历史, 最新的研究成果及研究方向, 总结统计重建算法发展的三个概念: 有序子集加速、增量方法和优化变换。对现有算法进行归纳总结, 关注统计重建的发展带来变革的概念和方法, 重点论述算法的思想, 勾勒统计重建方法发展的主线。

关键词: 统计重建; 核医学成像; EM 算法; 最大似然

中图分类号: TP 391.41 **文献标识码:** A

近年来, 随着核医学的发展和 PET/SPECT 的广泛应用, 包括一些中低能 CT^[1] 的不断涌现, 统计重建方法得到了越来越多的关注。与传统的解析重建 (如 FBP 类算法^[2-3]) 相比, 统计重建算法适用于低剂量的放射性条件, 具有物理模型准确、对噪声不敏感、易于加入约束条件的优点。与代数重建 (ART) 一样, 统计重建算法的计算量巨大, 但是随着加速算法和计算机硬件技术的发展, 统计重建在实际中得到广泛应用, 目前商用 PET/SPECT 系统都使用统计重建算法。

统计重建解决的问题有两类, 一类是发射型 CT 问题 (emission CT, ECT^[4]), 例如 PET/SPECT; 另一类是透射型 CT 问题 (transmission CT, TCT), 其放射源在重建物体外部, 这在 PET/CT 或者 SPECT/CT 混合型系统中广泛存在, 用于重建断层的衰减系数来进行 PET/SPECT 重建图像的校正或定位^[5-6]。相比较, TCT 的问题的求解要比 ECT 复杂。

统计重建算法基于 Poisson 统计模型, 它假设一条投影线上的观测数据满足泊松分布。

对于 ECT 模型: $y_i \sim \text{Poisson}\{[Ax]_i + r_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$

对于 TCT 模型: $y_i \sim \text{Poisson}\{b_i e^{-[Ax]_i} + r_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$

其中 y_i 代表一个探测器上的投影数据, i 为探测器序列; $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, 为重建图像的向量表示, $j = 1, 2, \dots, M$ 为像素序列; $A = \{a_{ij}\}$ 为投影矩阵, a_{ij} 表示从第 j 个像素放射出的光子被第 i 个探测器接收到的概率; b_i 为第 i 个探测器在无被检物时测得的射线强度; $[Ax]_i$ 表示对第 i 个探测器的前向投影过程, 通常写成内积形式 $\langle a_i, x \rangle = \sum_j a_{ij} x_j$ 。

统计重建问题最早由 Rockmore^[7] 等人提出, 第一次开创性的工作是在上个世纪 80 年代

初, Shepp^[8]和 Lange^[9]等人将期望最大化 (EM) 算法^[10]应用于统计重建, EM 算法使求解复杂的统计重建问题成为可能, 随后围绕 EM 算法的改进和算法加速使统计重建算法的研究不断深入。第二次开创性的工作是 1994 年 Hudson 和 Larkin^[11]提出的 OS 加速方法, OS 加速解决了 EM 类算法收敛速度慢的缺点, 大大提高了统计重建的实用性, 随后围绕算法加速和收敛性的研究迅速展开。

本文重点关注对统计重建的发展带来变革的 EM 类及其衍生算法, 总结了贯穿于统计重建发展的三个概念: 有序子集加速 (ordered subset, OS)、增量方法 (incremental method) 和优化变换 (optimization transfer, OT), 尝试勾勒出统计重建方法发展的主线。

1 统计重建框架和优化准则

1.1 统计重建框架

一个完整的统计重建框架包括五部分, 如图 1 所示。

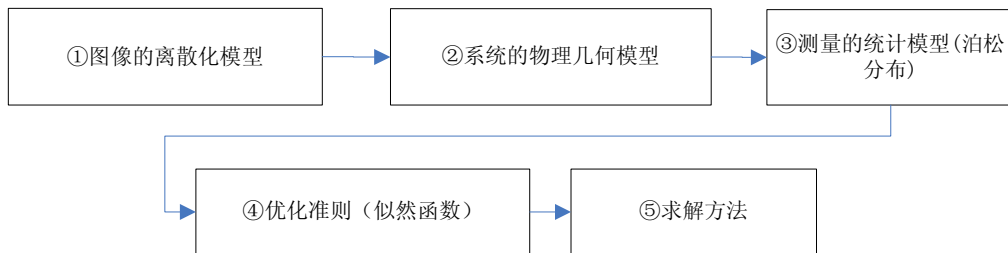


图 1 统计重建框架

①步考虑如何对重建的图像进行建模, 一般将图像离散成二维等大的像素矩阵, 文献 [12—13] 给出了其他可以选择的方式。②步考虑投影矩阵 $A = \{a_{ij}\}$ 的确定, A 与系统的几何结构和建模方法相关, 在 PET/SPECT 系统中, A 还包括散射校正、衰减校正等系统校正因子^[9, 14]。③步确定投影值 y_i 的形式, 统计重建认为 y_i 服从泊松分布, 即 $y_i \sim \text{Poisson}\{[Ax]_i\}$, 其他的模型还有移动泊松模型^[15]。④步引入一定的优化准则。⑤步在④的基础之上进行问题的求解。

本文关注④⑤步, 优化准则的引入将统计重建问题转化为一个参数估计的问题, 而求解参数估计又将统计重建转化为一个优化问题。统计重建由于大尺度问题, 实际中不能直接求解, 只能使用迭代算法, 与数学上的优化理论关系密切, 因此各种优化方法在统计重建领域得到了广泛的应用。

1.2 优化准则

统计重建问题的“病态性”使只能在一定的优化准则下考虑问题的求解。最常用的似然函数是最大似然准则 (maximum likelihood, ML) 和最大后验概率准则 (maximum-a-posteriori, MAP), 也称为“罚”函数似然准则 (penalized-likelihood, PL)。

ML 准则不能有效的抑制噪声, 图像随着迭代深入质量变差^[16—17]。MAP 准则^[18]通过引入先验知识弥补了 ML 的缺点, 降低了重建问题的“病态性”。实际中对似然函数和先验取对

数使其转化为易于处理的加和形式, MAP 和 ML 似然函数具有如下的关系:

$$L_{MAP}(x, y) = L_{ML}(x, y) + \beta P_{prior}(x) \quad (1)$$

$L_{ML}(x, y)$ 和 $L_{MAP}(x, y)$ 分别为取对数后的 ML 和 MAP 似然函数, $P_{prior}(x)$ 为取对数后的先验函数项, β 为表示先验知识作用强度的因子, 可看作常数。

ECT 和 TCT 问题是两个不同的问题, 但是其似然函数 $L_{ML}(x, y)$ 可以统一为公式 (2) 的形式:

$$L_{ML}(\lambda) = \sum_{i=1}^N h_i(y_i(\lambda)) \quad (2)$$

这为研究算法的性质带来了方便。

对于 ECT 问题:

$$h_i(l) = (y + r_i) - y_i \log(y + r_i) \quad (3)$$

对于 TCT 问题:

$$h_i(l) = (b_i e^{-y} + r_i) - y_i \log(b_i e^{-y} + r_i) \quad (4)$$

$L_{ML}(x, y)$ 是严格的凸函数^[9], 这保证了它只有一个极值点。 $L_{MAP}(x, y)$ 的凹凸性取决于先验函数的性质, 因此 MAP 问题要比 ML 问题复杂。理想的先验函数具有与 $L_{ML}(x, y)$ 相同的凹凸性质, 且具有分离变量的形式, 但是性质简单的先验函数往往得不到好的效果。常用的先验函数有具有平滑性质的二次型先验^[19], 具有边缘保持作用的 Median Root 先验^[20]和 TV 先验^[21]等。

2 统计重建算法优化技术

贯穿于统计重建算法发展当中有三个概念, 有序子集加速、增量方法和优化变换。有序子集加速和增量方法为算法加速和算法性质优化提供了方法和工具, 优化变换则是对 EM 等一大类算法在数学理论上的总结, 并给出了构造统计重建算法的框架。

2.1 有序子集加速 (OS)

EM 类算法^[9]收敛速度很慢, 使其实用性得到限制。1994 年出现的 OS 加速技术^[11]大大加快 EM 算法的收敛速度, 通过几步迭代就能够得到较好视觉效果的重建图像, 使统计重建算法步入实用阶段。

OS 加速的思想最早在代数重建 (ART) 中出现^[22], 其方法是将投影数据划分为若干子集, 每次只使用子集内的投影数据更新重建图像。通过合理地划分子集和选择子集的顺序, OS 算法在迭代初期能够有效的利用投影数据的不相关性, 提高算法的收敛速度^[22]。OS 的加速方法具有较好的通用性, 任何具有投影序列加和形式的算法都能够从 OS 加速中获益, 而在统计重建问题中, 由于投影一般是独立测量的, 因此大多数算法都具有这种形式。

OS 类算法的缺点在于没有完备的收敛性证明。2000 年前后, OS 类算法的收敛性在理论和实用上得到了改进, 出现了收敛的 OS 算法。本文第 5 部分主要介绍 OS 类算法。

2.2 优化变换 (OT)

OT 的思想是将复杂的统计重建的优化问题转换成易于求解的优化问题, 转换后的问题一般具有易于优化、分离变量、降低维数的特点。De Pierro^[23]通过对 ML-EM 算法的分析指出, EM 算法实质上是将统计重建问题转变为最大化一个期望函数, 这个函数称为代理函数 (surrogate function), 该代理函数由于具有分离变量的性质而易于求解。Lange^[24]明确提出了 OT 的概念, 指出通过构造满足如下条件的代理函数 $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned}\Phi(x^n|x^n) &= L(x^n) \\ \Phi(x|x^n) &\leq L(x), \forall x \\ \nabla_x \Phi(x|x^n)|_{x=x^n} &= \nabla L(x)|_{x=x^n}\end{aligned}\quad (5)$$

并证明了通过在每步迭代中最大化 $\Phi(x)$, 能够使似然函数的值递增。EM 类算法、Convex 算法、SAGE 算法和 SPS 算法本质上都属于 OT 类算法。OT 概念的提出, 既是对现有算法理论上的归纳总结, 也给出了构造统计迭代的算法的框架, 通过构造不同的代理函数 $\Phi(x)$ 可以得到性质各异的算法。Fessler^[25]指出算法收敛速度与代理函数在迭代点的曲率有关, 大曲率的代理函数的收敛速度更快, 这为构造代理函数提供了方向。

2.3 增量方法 (Incremental Method)

增量方法的概念在其他学科和数学理论^[26]中出现, 但是直到 2000 年前后才在统计重建问题中得到注意^[27]。增量方法为统计重建算法的研究提供了理论上的支持和指导方向, 其核心思想是在算法的迭代中不断改变或修正目标量, 来改进算法的性质, 该目标量可以是所求结果、中间变量甚至是函数。对于统计重建算法来说, 增量方法具有对算法加速和改进算法收敛性的作用。例如 OS 类算法可以看作是增量梯度方法 (incremental gradient method)^[28]; Neal 的增量 EM 算法^[27]以完备数据空间为增量目标量, 提高了 EM 算法的收敛速度; Fessler^[29]将增量方法引入 OT 的框架中, 通过增量的方法构造代理函数, 提出 TRIOT 算法解决了 OS 类的 TCT 算法不收敛的问题。

3 统计重建算法

本节介绍主要的统计重建算法, 说明算法的思想和适用条件。

3.1 EM 算法

针对 ECT 的 ML 问题, Shepp^[8]和 Lange^[9]等人将 EM 算法^[10]应用于统计重建, 提出了 ML-EM 算法。EM 算法认为在更高维的“完备数据空间” (complete data space) 要比在投影数据空间中求解问题更容易。对于 ECT, 完备数据空间定义为 $C = \{C_{ij}\}$, 其中 C_{ij} 表示从第 j 个单元发射而被第 i 个探测器探测到的光子数。ML-EM 算法的迭代过程分 E 步和 M 步, E 步在空间 C 上对似然函数求条件期望 Q , M 步通过最大化 Q 对图像向量 x 进行估计, 最大化 Q 的过程要比直接最大化似然函数 $L(x)$ 容易。ML-EM 算法本质上是 OT 类算法, 其代理函数 Q 是通过求似然函数在完备数据空间上的条件期望得到。

ML-EM 对 ECT 的 ML 问题给出了简洁的显式迭代公式:

$$x_j^{k+1} = \frac{x_j^k}{\sum_j a_{ij}} \sum_i \frac{y_i a_{ij}}{\sum_j a_{ij} x_j^k} \quad (6)$$

k 为迭代次数。ML-EM 算法的优点是结果简洁, 并且自然地引入了像素值非负的约束。

针对 TCT 的 ML 问题, EM 算法的 M 步得到的超越方程组不能直接求解, 因此不能得到显式的迭代公式, Lange^[9]通过 Taylor 展开的方法, 给出了近似的迭代公式。Ollinger^[30]则通过一步 Newton 法来最大化 Q 。

EM 算法使求解统计重建问题成为可能, 开创了统计重建这一领域的发展, 但是其主要缺点是收敛速度慢, 在对实时性要求较高的系统中并不实用, 因此在随后的时间里, 围绕 EM 算法的加速研究深入展开。

3.2 OSL 算法 (One-Step-Late)

对于 ECT 的 MAP 问题 Green^[31-32]给出了一种通用的近似算法, OSL 算法。OSL 从 EM 算法推导过程出发, 指出对于 MAP 问题, EM 算法需要求解如下的等式方程组

$$\frac{\sum_j z_{ij}}{x_j} - \sum_j a_{ij} - \beta \frac{\partial}{\partial x_j} P(x) = 0 \quad (7)$$

其中 $z_{ij} = \frac{y_i a_{ij} x_j}{\sum_j a_{ij} x_j}$ 。当 $\beta=0$ 时, OSL 得到与 ML-EM 算法相同的结果。 $\beta \neq 0$ 时, 先验函数

$P(x)$ 的存在导致了 x 分量间的耦合, 使求解该方程组变得非常困难。OSL 做了近似处理,

使用上一步迭代结果 x^{old} 来计算先验函数的梯度, 即:

$$\left. \frac{\sum_j z_{ij}}{x_j} - \sum_j a_{ij} - \beta \frac{\partial}{\partial x_j} P(x) \right|_{x=x^{old}} = 0 \quad (8)$$

这样先验函数的梯度项变为常数, OSL 得到的迭代公式为:

$$x_j^{new} = \frac{\sum_j z_{ij}}{\sum_j a_{ij} + \beta \left. \frac{\partial}{\partial x_j} P(x) \right|_{x=x^{old}}} \quad (9)$$

由于每步迭代中先验函数的梯度项使用上一步迭代得到的图像向量计算, 所以称为 “One Step Late” 方法。OSL 的出发点是, 对于收敛速度较慢的 EM 算法来说, 前一迭代点的梯度跟当前点的梯度差别是很小的。其本质相当于在迭代点对先验函数的梯度项进行 Taylor 展开, 将展开式的第一项作为梯度的近似。

OSL 算法是一种近似算法, 在数学上是不严谨的, 其算法的收敛性没有得到证明, 并且

也不能保证每步迭代似然函数值的增加,针对不同的先验函数其算法的性质也不相同,但是由于算法简单,在实际中比较实用。OSL 算法适用于具有连续一阶导数的先验函数,对先验函数的适用性也比较强。Lange^[19]针对特殊的情况证明的算法的收敛性,并将 OSL 算法推广到求解 TCT 的问题。

3.3 Convex 算法

De Pierro 的 Convex 算法^[23]对于统计迭代的发展具有重要意义。对于 ECT 问题,利用凸函数不等式的性质^[24],De Pierro 非常简洁地推导满足 OT 条件(见公式(5))的代理函数 $Q(x, x^k)$:

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{i=1}^M \left(y_i \log \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j - \langle a_i, x \rangle \right) = \\ &= \sum_{i=1}^M \left\{ y_i \log \sum_{j=1}^N \left(\frac{a_{ij} x_j^k}{\langle a_i, x^k \rangle} \frac{a_{ij} x_j}{a_{ij} x_j^k} \langle a_i, x^k \rangle \right) - \langle a_i, x \rangle \right\} \geq \\ &= \sum_{i,j}^{M,N} \left(y_i \frac{a_{ij} x_j^k}{\langle a_i, x^k \rangle} \log \frac{x_j}{x_j^k} \langle a_i, x^k \rangle - a_{ij} x_j \right) = \\ &= Q(x, x^k) \end{aligned} \quad (10)$$

$Q(x, x^k)$ 与 ML-EM 算法 E 步的期望函数相同。Convex 算法的意义在于将函数的凹凸性不等式引入统计重建算法,为后来算法的研究提供了借鉴意义。Convex 算法的推导简洁明了,通过函数的数学性质绕过了 EM 的相对复杂的完备数据空间概念,De Pierro 引入的函数的凹凸性不等式也称为 Convex 技巧,是构造 OT 类算法的一种常用技巧^[24]。

Convex 算法也适用于 ECT 的 MAP 问题,其要求先验函数是严格凸性的,二阶导数连续且有下界,De Pierro 证明了这些约束条件下算法的收敛性^[23]。Lange^[33]推广了 Convex 算法用来求解 TCT 的 MAP 问题,Lange 的算法在求解 M 步的最大化问题时等价于求解一个超越方程组,由于不能得到显式的表达式,Lange 仿照 Ollinger^[30]使用一步 Newton 法来近似求解。

3.4 SAGE 算法

SAGE 算法给出了另外一种思路,从分析 EM 算法的完备数据空间出发,Fessler 指出 EM 算法的收敛速度与完备数据空间的 Fisher Information 有反比的关系^[34],并提出通过减小完备数据空间的 Fisher Information 来加快 EM 算法的收敛速度的方法。

Fessler 提出“隐藏数据空间”(hidden data space)的概念,其思想是仿照 EM 算法,构造比完备数据空间更“紧凑”的隐藏数据空间。SAGE 算法对像素进行分组,一组一组地更新像素值。对每一组,以该组内的像素为变量构造对数似然函数,而固定其他组像素值不变,然后在该组对应的隐藏数据空间上使用 EM 算法求解。Fessler 在文献[35]和文献[36]中分别提出了两种构造隐藏数据空间的方法。

SAGE 算法本质上属于 OT 类算法,适用于 ECT 的 ML^[36]和 MAP 问题^[35, 37],其优点是全局收敛,实验证明 SAGE 要比 EM 算法收敛速度快,也要比 OSL 快。

3.5 SPS 算法

SPS (separable paraboloidal surrogates) 算法^[38]从 OT 的思想出发, 通过构造易于最大化的二次型代理函数简化 EM 算法的计算复杂度。SPS 算法对对数似然函数做二阶 Taylor 展开:

$$L(x) \geq Q(x; x^k) = \sum q_i([Ax]_i; l_i^k) \quad (11)$$

$$\text{其中} \quad q_i(l; l_i^k) = h_i(l_i^k) + \dot{h}_i(l_i^k)(l - l_i^k) + \frac{1}{2} c_i(l_i^k) (l - l_i^k)^2 \quad (12)$$

通过构造二次项系数 $c_i(l)$ 使代理函数 $Q(x; x^k)$ 满足 OT 类算法的条件 (见公式 (5))。SPS 适用于 ECT 的 ML 和具有 Convex 形式先验的 MAP 问题, Erdogan^[25, 39]将其推广到 TCT 的 ML 和 MAP 问题。对于 ECT、SPS 算法的代理函数具有分离变量的形式, 易于最大化, TCT 的代理函数不具有变量分离的形式, 可以使用 De Pierro 的 Convex 技巧进行进一步的变量分离。

SPS 算法是全局收敛的, 并且满足像素的非负性条件, 迭代的初始收敛速度要比 SAGE 快, 计算机浮点运算次数也较少。

3.6 其他统计重建方法概述

统计重建问题可以看作是一个优化问题, 求解优化问题的一般方法同样适用于统计重建, 本文将这类算法称为优化类算法。文献[40–42]基于 EM 算法可看作梯度算法的事实提出共轭梯度 (CG) 算法, 使用预处理技术进行算法加速; 文献[43–44]的坐标下降算法; 文献[45–46]的牛顿类算法; 文献[47]的内点算法; 其他的优化类算法还包括文献[48–49]等。优化类算法丰富了统计重建算法的内容, 增加了算法的多元性。

4 OS 加速类算法

本节详细介绍各种 OS 类算法, 与前面介绍的算法相比, OS 加速类算法由于速度上的优势使其实用性更强。该类算法的缺点在于收敛性的证明, 一般来说 OS 类算法是不收敛的, 在实际中易产生有限循环 (limit cycle)^[11]。解决办法之一对算法理论的创新, 研究收敛的 OS 算法, 而对于现有的 OS 算法可以通过引入松弛因子, 在迭代后期使用收敛算法的混合型算法来进行改进和解决。

4.1 OSEM 算法

Hudson 和 Larkin 提出的 OSEM 算法^[11]是针对 ECT 的 ML 重建问题, 它将投影数据集合划分为若干互不相交的子集 $S_l, l=1, 2, \dots, L$, 迭代在每一个子集上进行, 遍历所有的子集完成一次迭代。OSEM 在每个子集上的迭代公式如下:

$$x_j^{l+1} = x_j^l \frac{\sum_{i \in S_l} \frac{y_i a_{ij}}{\mu_i^l}}{\sum_{i \in S_l} a_{ij}}, \text{ 其中: } \mu_i^l = \sum_{j=1}^M a_{ij} x_j^l \quad (13)$$

OSEM 算法是一个经验算法，其迭代公式与 ML-EM 算法相似，只是限制了每步迭代在一个子集内完成。OSEM 通过几步迭代就能够得到具有较好视觉效果的重建图像，虽然算法是不收敛的^[11]，但是由于其简洁性和相比于 ML-EM 大大提高了收敛速度，使 OSEM 在实际中得到了广泛的应用，为统计重建带来了革命性的飞跃。

针对 ECT 的 MAP 重建问题，Hudson 和 Larkin 将 OS 的思想应用于 Green 的 OSL 算法（见公式（9）），提出了 OS-GP 算法^[11]。相对于原始的 OSL，OS-GP 尽管在数学上也并不严谨，但是实验表明其收敛速度得益于 OS，加速也大大提高。

4.2 OSC 算法

1998 年 Kamphuis 等人提出 OSC 算法^[50]适用于 TCT 问题，是对 Lange 的 Convex 算法^[33]的 OS 加速。OSC 得益于 Convex 算法的简洁性和比 EM 算法快的收敛速度，通过 OS 的进一步加速，使 OSC 成为解决 TCT 问题的实用算法。

4.3 RAMLA 和 BSREM 算法

1996 年 Browne 和 De Pierro^[51]针对 ECT 的 ML 重建问题提出了 RAMLA 算法。RAMLA 直觉地将 Herman 等人的代数重建公式^[22]中的梯度项用 ML 代价函数的梯度进行了替换，给出了如下的重建公式：

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \lambda_k x_j^k \left(\frac{y_{i_k}}{\langle a^{i_k}, x^k \rangle} - 1 \right) a_{i_k j} \quad (14)$$

λ_k 为 Herman 公式中的松弛因子， $\lambda_k > 0$ ， $\lambda_k a_{ij} \leq 1$ 。

公式（14）对系统矩阵按行顺序进行迭代，通过引入子集的概念，Browne 和 De Pierro 给出按照子集进行迭代的 RAMLA 算法：

$$x_j^{(k,l)} = x_j^{(k,l-1)} + \lambda_k x_j^{(k,l-1)} \sum_{i \in S_l} a_{ij} \left(\frac{y_i}{\langle a^i, x^{(k,l-1)} \rangle} - 1 \right) \quad (15)$$

其中松弛因子满足 $0 < \lambda_k c_{ij} \leq 1$ ， $c_{ij} = \sum_{i \in S_p} a_{ij}$

RAMLA 是带有松弛因子的 OS 类算法，当松弛因子 $\lambda_k = \frac{1}{c_{ij}}$ 时，RAMLA 等同于 OSEM 算法。

RAMLA 的优点是，通过引入松弛因子 Browne 和 De Pierro 证明了算法的收敛性，弥补了 OSEM 的不足；但是在实际中为了保证算法的收敛速度和收敛性，该松弛因子的选择比较困难，需要通过实验来进行。

针对 ECT 的 MAP 重建问题，2001 年 De Pierro^[52]从 RAMLA 出发进行了简单的扩展，提出了 BSREM 算法。BSREM 算法实质上是将 RAMLA 中的 ML 梯度项用 MAP 的梯度进行替换。BSREM 算法每一次迭代分两步，第一步与 RAMLA 相同，借用公式（15）的符号含义

$$x^k = x^{(k,l)} \quad (16)$$

在第二步中单独考虑先验函数的作用, 将先验函数的梯度加入算法中

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k \beta D^k \nabla P(x^k) \quad (17)$$

其中 $D^k = \text{diag}(x_1^k, x_2^k, \dots, x_M^k)$ 。De Pierro 给出了 BSREM 一个弱收敛性条件, 如果迭代序列收敛, 那么一定收敛到 MAP 问题的解。Ahn 和 Fessler^[28]于 2003 年对 BSREM 算法进行了改进, 引入修正过的比例因子 D^k , 改进过的算法去掉了对于 BSREM 收敛性假设条件的依赖, 也使松弛因子的选择更加方便。

4.4 OS-SPS、OSTR 和 TRIOT 算法

基于 SPS 算法, Ahn^[28]提出对 ECT 问题的 OS-SPS 算法, 对 TCT 问题, Erdogan^[6]提出了 OSTR 算法。得益于 OS 加速, OS-SPS 和 OSTR 都比 SPS 算法收敛速度快。OS-SPS 通过引入松弛因子解决了引入 OS 带来的算法不收敛的问题, 而 OSTR 算法是不收敛的。

为了解决对 OSTR 不收敛的问题, 2004 年 Ahn 和 Fessler^[29]将增量方法引入 OT 框架, 提出了 IOT (incremental optimization transfer) 方法。IOT 的思想是在迭代中通过增量的方式修正 OT 的代理函数, 使其利用前步迭代的结果逼近更优的代理函数, 从而改进算法的性质和效率, 文献[29]证明了算法的收敛性。应用于 TCT 的问题, Ahn 提出了 TRIOT 算法, 在 OSTR 迭代达到有限循环后, 使用 TRIOT 算法继续迭代, 这种混合型的算法解决了 OSTR 不收敛的问题。

4.5 COSEM 算法

OS-SPS 和 BRREM 都需要引入松弛因子解决 OS 加速带来的算法收敛性问题, 而松弛因子的确定比较困难。2004 年 Hsiao^[53]等人从完备数据似然函数的角度出发, 给出求解 ECT 的 ML 问题的另一种思路。该方法从具有拉格朗日形式的完备数据对数似然函数出发:

$$L_{\text{complete}}(x, C, \lambda) = -\sum_{ij} C_{ij} \log(a_{ij} x_j) + \sum_{ij} a_{ij} x_j + \sum_{ij} C_{ij} \log C_{ij} + \sum_i \lambda_i \left(\sum_j C_{ij} - y_i \right) \quad (18)$$

$C = \{C_{ij}\}$ 为 ECT 的完备数据空间, C_{ij} 表示从第 j 个单元发射而被第 i 个探测器探测到的光子数, 满足 $\sum_j C_{ij} = y_i$ 。分别以 C 和 x 为变量最大化 $L_{\text{complete}}(x, C, \lambda)$ 可以得到

$$C_{ij} = y_i \frac{a_{ij} x_j}{\sum_j a_{ij} x_j} \text{ 和 } x_j = \frac{\sum_i C_{ij}}{\sum_i a_{ij}}, \text{ 合并二式可以得到与 ML-EM 相同的结果。同样从拉格朗日形式的完备数据似然函数出发, Hsiao 引入 OS 加速方法, 提出了 COSEM 算法}^{[53-54]}。$$

与 OSEM 只对投影数据子集化不同, COSEM 对投影数据和完备数据空间 $C = \{C_{ij}\}$ 均做子集

化。对应于投影数据子集 S_p 的完备数据空间子集 C_p 定义为 $\{C_{ij}, \forall i \in S_p, \forall j\}$ ，在子集上构造对数似然函数：

$$L_{complete}(x, C, \lambda) = -\sum_{l=1}^L \sum_{i \in S_l} \sum_{j=1}^N C_{ij} \log \frac{C_{ij}}{a_{ij} x_j} + \sum_{ij} a_{ij} x_j + \sum_{l=1}^L \sum_{i \in S_l} \lambda_i \left(\sum_j C_{ij} - y_i \right) \quad (19)$$

仿照上面的方法 Hsiao 得到 ECOSEM 的迭代公式为：

$$C_{ij}^{(k,l)} = \begin{cases} y_i \frac{a_{ij} x_j^{(k,l-1)}}{\sum_j a_{ij} x_j^{(k,l-1)}} & \forall i \in S_l, \forall j \\ C_{ij}^{(k,l)} & \forall i \notin S_l, \forall j \end{cases} \quad (20)$$

$$f_j^{(k,l)} = \frac{\sum_i C_{ij}^{(k,l)}}{\sum_i a_{ij}} \quad (21)$$

ECOSEM 算法改进了 OSEM 算法不收敛的性质，算法收敛到 ML 的解，但是其初始收敛速度要比 OSEM 算法和 RAMLA 算法稍慢。与其他收敛的 OS 类算法相比，ECOSEM 的优势在于不需要额外的松弛因子或实验参数。Hsiao^[55-56]将 ECOSEM 算法推广到求解 ECT 的 MAP 问题。

5 总结与展望

统计重建经过 20 多年的发展，已经形成了比较完善的体系结构，本文对现有的算法进行了总结，指出了对算法发展具有重要意义的三个概念：有序子集加速，增量方法和优化变换。未来的研究方向在于先验知识对重建图像质量的改善作用、感兴趣区 (ROI) 定量性质的研究^[57]，和对算法的进一步加速及收敛性研究。

参考文献

- [1] Feng B, Fessler J A, Pretorius P H, et al. Evaluation of the ordered-subset transmission (OSTR) algorithm for transmission imaging on SPECT systems using axially overlapping cone-beams[J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 2006, 53: 1221-1229.
- [2] Koole M, Van de Walle R, Van Laere K, et al. Study of the quantification of FBP SPECT images with a correction for partial volume effects[J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 2002, 49: 69-73.
- [3] Shepp L A, Vardi Y, Ra J B, et al. Maximum likelihood PET with real data[J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1984, NS-31: 910-913.

- [4] Budinger T F, Gullberg G T, Huesman R H. Emission computed tomography in image reconstruction from projections: implementation and applications[M]. Springer-Verlag, 1979: 147-246.
- [5] Lange K. A gradient algorithm locally equivalent to the EM algorithm[J]. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 1995, 57: 425-437,.
- [6] Erdogan H. Ordered subsets algorithms for transmission tomography[J]. Physics in Medicine and Biology, 1999, 44: 2835.
- [7] Rockmore A J, Macovski A. A maximum-likelihood approach to emission image reconstruction from projections[J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1976, NS-23: 1428-1432.
- [8] Shepp L A, Vardi Y. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1982, MI-2: 113-122.
- [9] Lange K, Carson R. EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography[J]. J Comput Assist Tomogr, 1984, 8: 306-316.
- [10] Dempster A P, Laird N M, Rubin D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. J Royal Stat Soc Series B, 1977, 39: 1-38.
- [11] Hudson H M, Larkin R S. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1994, 13: 601-609.
- [12] Muller S P, Kijewski M F, Moore S C. Maximum-likelihood estimation: a mathematical model for quantitation in nuclear medicine[J]. Journal of Nuclear Medicine, 1990, 31: 1693-1701.
- [13] Ping-Chun C, Rogers W L, Clinthorne N H, et al. Model-based estimation for dynamic cardiac studies using ECT[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1994, 13: 217-226.
- [14] Chornoboy E S, Chen C J, Miller M I, et al. An evaluation of maximum likelihood reconstruction for SPECT[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1990, 9: 99-110.
- [15] Sangtae A, Fessler J A. Statistical emission image reconstruction for randoms-precorrected PET scans using negative sinogram values[C]. IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record, 2003, 5: 3062-3066.
- [16] Snyder D L, Miller M I, Thomas L J, et al. Noise and edge artifacts in maximum likelihood reconstructions for emission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1987, MI-6: 228-238.
- [17] Herman G T, Odhner D. Performance evaluation of an iterative image reconstruction algorithm for positron emission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1991, 10: 336-346.
- [18] Levitan E, Herman G. A maximum a posteriori probability expectation maximization algorithm for image reconstruction in emission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1987, MI-6: 185-192.
- [19] Lange K. Convergence of EM image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1990, 9: 439-446.
- [20] Alenius S, Ruotsalainen U. Improving the visual quality of median root prior images in PET and SPECT reconstruction[C]. IEEE Nuclear Science Conference Record, 2000.
- [21] Panin V Y, Zeng G L, Gullberg G T. Total variation regulated EM algorithm[J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1998, 3: 1562-1566.
- [22] Herman G T, Meyer L B. Algebraic reconstruction techniques can be made computationally efficient[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1993, 12: 600-609.

- [23] De Pierro A R. A modified expectation maximization algorithm for penalized likelihood estimation in emission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1995, 14: 132-137.
- [24] Lange K, Hunter D R, Yang I. Optimization Transfer Using Surrogate Objective Functions[J]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 2000, 9: 1-20.
- [25] Erdogan H, Fessler J A. Monotonic algorithms for transmission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging. 1999, 18: 801-814.
- [26] Geary A, Bertsekas D P. Incremental subgradient methods for nondifferentiable optimization[J]. SIAM Journal on Optimization. 1999, 1: 907-912.
- [27] Neal R, Hinton G E. A View Of The Em Algorithm That Justifies Incremental, Sparse, And Other Variants[M]. Learning in Graphical Models, 1998, 355-368.
- [28] Sangtae A, Fessler J A. Globally convergent image reconstruction for emission tomography using relaxed ordered subsets algorithms[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2003, 22: 613-626.
- [29] Ahn S, Fessler J A, Blatt D, et al. Incremental optimization transfer algorithms: application to transmission tomography[C]. IEEE Nuclear Science Conference Record, 2004.
- [30] Ollinger J M. Maximum-likelihood reconstruction of transmission images in emission computed tomography via the EM algorithm[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1994, 13: 89-101.
- [31] Green P J. On Use of the EM Algorithm for Penalized Likelihood Estimation[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological), 1990, 52: 443-452.
- [32] Green P J. Bayesian reconstructions from emission tomography data using a modified EM algorithm[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1990, 9: 84-93.
- [33] Lange K, Fessler J A. Globally convergent algorithms for maximum a posteriori transmission tomography[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, 4: 1430-1438.
- [34] Fessler J A, Clinthorne N H, Rogers W L. On complete-data spaces for PET reconstruction algorithms[J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1993, 40: 1055-1061.
- [35] Fessler J A, Hero A O. New complete-data spaces and faster algorithms for penalized-likelihood emission tomography[J]. IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference, 1993, 3: 1897-1901.
- [36] Fessler J A, Hero A O. Space-alternating generalized expectation-maximization algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42: 2664-2677.
- [37] Fessler J A, Hero A O. Penalized maximum-likelihood image reconstruction using space-alternating generalized EM algorithms[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, 4: 1417-1429.
- [38] Fessler J A, Erdogan H. A paraboloidal surrogates algorithm for convergent penalized-likelihood emission image reconstruction[C]. IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference, 1998, 2: 1132-1135.
- [39] Erdogan H, Fessler J A. Accelerated monotonic algorithms for transmission tomography[C]. In Proc IEEE Intl Conf On Image Processing. 1998, 2: 680-684.
- [40] Mumcuoglu E U, Leahy R, Cherry S R. Fast gradient-based methods for Bayesian reconstruction of transmission and emission PET images[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1994, 13: 687-701.

- [41] Lalush D S, Tsui M W. The importance of preconditioners in fast Poisson-based iterative reconstruction algorithms for SPECT[C]. IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference Record, 1995, 3: 1326-1330.
- [42] Lalush D S, Tsui M W. Fast and stable maximum a-posteriori conjugate-gradient reconstruction algorithm[J]. Medical Physics, 1995, 22: 1273-1284.
- [43] Bouman C A, Sauer K. A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5: 480-492.
- [44] Fessler J A, Ficaro E P, Clinthorne N H. Grouped-coordinate ascent algorithms for penalized-likelihood transmission image reconstruction[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1997, 16: 166-175.
- [45] Kaufman L. Implementing and accelerating the EM algorithm for positron emission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1987, MI-6: 37-51.
- [46] Jean-Baptiste T, Ken S, Charles A B. Newton-style optimization for emission tomographic estimation[J]. SPIE, 2000, 9: 269-282.
- [47] Narayanan M V, Byrne C L, King M A. An interior point iterative maximum-likelihood reconstruction algorithm incorporating upper and lower bounds with application to SPECT transmission imaging[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2001, 20: 342-353.
- [48] Li M, Kudo H. Unified approach to statistical image reconstruction using dual ascent optimization[C]. IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record, 2004, 6: 3541-3545.
- [49] Calvin A J, Ariela S. A Primal-Dual Method for Large-Scale Image Reconstruction in Emission Tomography[J]. SIAM, 2001, 11: 691-715.
- [50] Kamphuis C, Beekman F J. Accelerated iterative transmission CT reconstruction using an ordered subsets convex algorithm[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1998, 17: 1101-1105.
- [51] Browne J, De Pierro A B. A row-action alternative to the EM algorithm for maximizing likelihood in emission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1996, 15: 687-699.
- [52] De Pierro A R, Yamagishi M E B. Fast EM-like methods for maximum "a posteriori" estimates in emission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2001, 20: 280-288.
- [53] Ing-Tsung H, Anand R, Parmeshwar K. An accelerated convergent ordered subsets algorithm for emission tomography[J]. Physics in Medicine and Biology, 2004, 49: 2145.
- [54] Ing-Tsung H, Anand R, Gene R G. Provably convergent OSEM-like reconstruction algorithm for emission tomography[J]. SPIE, 2002, 10-19.
- [55] De Pierro A B. On the relation between the ISRA and the EM algorithm for positron emission tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1993, 12: 328-333.
- [56] Ing-Tsung H, Rangarajan A, Khurd P. A fast convergent ordered subset Bayesian reconstruction for emission tomography[C]. IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record, 2004, 6: 3928-3932.
- [57] Jinyi Q, Huesman H. Theoretical study of penalized-likelihood image reconstruction for region of interest quantification[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2006, 25: 640-648.

Overview of Statistical Reconstruction Algorithms

WANG Zhen-tian, ZHANG Li, XING Yu-xiang, KANG Ke-jun

(Department of Engineering Physic, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In this paper, the statistical reconstruction algorithms for PET and SPECT are discussed, including the history, the new improvements and the future. Three concepts that have significant meanings in the development of statistical reconstruction are summarized: Ordered Subset (OS), Incremental Method and Optimization Transfer (OT). In order to show the outline of statistical reconstruction in the past years, this paper focuses on the algorithms that have significant innovations in both concept and method, and introduces the main ideas and motivations of these algorithms.

Keywords: statistical reconstruction; nuclear medical imaging; EM; maximum likelihood

作者简介: 王振天 (1982—), 男, 清华大学博士研究生, 从事统计重建算法的研究工作, Tel: 010-51538013, E-mail: wangzt05@mails.tsinghua.edu.cn; 张丽 (1970—), 女, 清华大学工程物理系副研究员, 主要从事 CT 理论和重建算法研究, Tel: 010-62780909-86201, E-mail: zhangli@nuctech.com。