

文章编号: 1004-4140 (2008) 02-0001-07

# 三维 Radon 变换的一种快速解析方法

徐海军, 魏东波, 傅健, 张立凯, 戴修斌

(北京航空航天大学 机械工程及自动化学院, 北京 100083)

**摘要:** 3D Radon 变换及其反变换是 X-CT 三维图像重建理论的核心, 它在其他许多学科领域也有广泛应用。3D Radon 变换的表达式是一个三重积分, 按照定义直接计算相当费时。为此, 研究一种新的快速的方法实现 3D Radon 变换, 对 X-CT 图像重建理论及相关领域的发展有重要意义。本文以算法仿真实常用椭球模型为基础, 通过求解椭球模型与空间任意平面的面积, 实现了用解析的方法快速得到模型的 Radon 变换, 进一步比较了它与传统方法的优缺点, 最后根据 Radon 反变换重建出原物体模型, 计算机仿真结果验证了这种方法的正确。

**关键字:** 3D Radon 变换; X-CT; 图像重建; Radon 反变换

**中图分类号:** TP 391.41      **文献标识码:** A

Radon 变换及其反变换最初是在 1917 年由奥地利数学家雷唐提出的, 现已成为 CT 重建理论的基础<sup>[1]</sup>。X-CT 通过 X 射线透照物体进行断层成像, 是一种先进的无损检测方法, 它不必知道物体内部的具体细节, 仅利用探测器获取到的投影数据, 通过一定的图像重建算法即可很好地反演出原物体图像, 因此, 越来越受到人们关注。

对于 2D Radon 变换, 它是沿着物体投影线的一个线积分, 设  $f(\mathbf{x})$  表示某种二维分布,  $f(\mathbf{x})$  沿所有可能直线的积分构成了它的 2D Radon 变换, 用解析方法只需计算直线与物体相交的两点, 求出线段长度即可<sup>[2]</sup>; 而对于 3D Radon 变换, 它是一个三重积分的形式, 空间中每一个点的 Radon 值都是物体空间的一个面积分, 每个积分平面可以由物体空间中一个独特的点来表示, 沿着空间所有可能方向的所有平面的面积分, 就构成了一个物体的 3D Radon 变换空间<sup>[3]</sup>。由于 3D Radon 变换要求计算所有平面的面积分, 每个点的复杂度在  $N^3$ , 计算量较大, 直接用代数方法很费时间, 本文基于常用的椭球模型, 提出了计算 3D Radon 变换的一种快速几何方法, 并把它与传统方法在变换时间上做了比较, 最后, 利用 3D Radon 反变换, 给出了它在三维重建中的应用。计算机仿真结果证明了这种方法的有效性。

## 1 概述

### 1.1 Radon 变换

设函数  $f(\bar{\mathbf{x}})$  为  $n$  维空间中的连续可导函数,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  是  $\mathbf{R}^n$  空间中的一个单位向量,  $f(\bar{\mathbf{x}})$  的 Radon 变换被定义为沿每一个点在  $n-1$  维超平面的积分, 公式表达见式 (1):

$$\hat{f}(p, \boldsymbol{\varepsilon}) = \int f(\bar{\mathbf{x}}) \delta(p - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}} \quad (1)$$

收稿日期: 2008-01-07。

项目基金: 国家自然科学基金资助项目 (50575015)。

对于二维 Radon 变换来说, 如式 (2) [4],

$$\hat{f}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta + s \sin \theta, t \sin \theta - s \cos \theta) ds \quad (2)$$

2D Radon 变换的几何意义是: 函数  $f(x, y)$  在方向  $\theta$  距原点  $t$  上的一个投影值, 当  $\theta$  固定时,  $t$  取所有不同的值就可得到  $\theta$  方向上的投影图  $P_{(\theta)}$ , 再改变  $\theta$  值即可得到不同方向上的投影图, 也即函数  $f$  沿所有可能直线的积分构成了它的 2D Radon 变换, 如图 1。

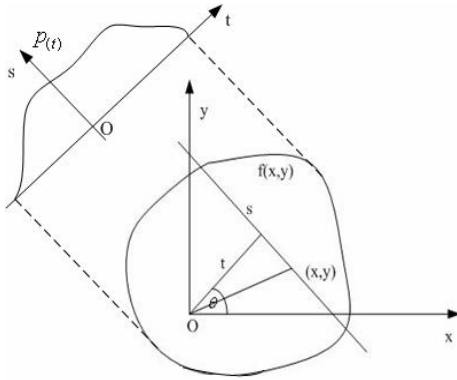


图 1 2D Radon 变换

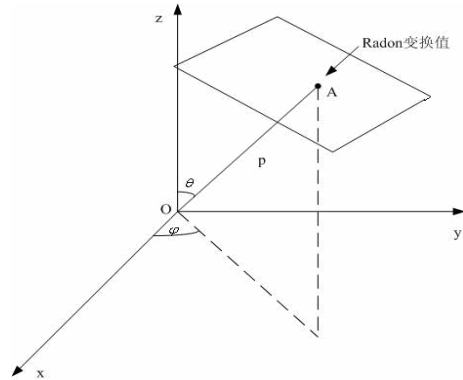


图 2 空间中任意一点的 3D Radon 变换

## 1.2 3D Radon 变换

设  $\bar{x}(x, y, z)$ , 对于 3D 函数  $f(\bar{x})$ , 它的 Radon 变换由平面上的积分组成 [3]:

$$\hat{f}(p, \varepsilon) = \int_{R^3} f(x) \delta(p - \varepsilon x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \delta(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta - p) dx dy dz \quad (3)$$

这里, 积分平面方程是  $p = x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta$ , 三维空间中的单位向量用  $\varepsilon = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  表示, 过  $A$  点的 Radon 变换值为垂直于指向该点的单位向量, 且距原点距离为  $p$  的积分平面的面积分, 如果空间函数确定, 则它表示与空间函数  $f(\bar{x})$  相交所得截面的面积上的  $f(\bar{x})$  的面积分, 如图 2 所示。

## 2 3D Radon 变换的传统求解方法

### 2.1 直接积分

式 (3) 的 3D Radon 变换包含一个三维脉冲函数, 可以根据  $\delta$  函数的特性, 通过此公式直接求积分计算 3D Radon 变换。将待重建区域划分成均匀的网格, 以  $128 \times 128 \times 128$  的空间网格为例, 由函数  $\delta$  的性质, 式 (3) 可化为求和公式。 $\delta$  函数首先是由英国物理学家狄拉克为了描述量子力学中的某些数量关系而引入的, 它的一般定义是 [5]:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (4)$$

对于三维狄拉克函数，还有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y, z) dx dy dz = 1 \tag{5}$$

那么 (3) 式可以重写为：

$$\hat{f}(\varepsilon, p) = \sum_{z=-64}^{z=64} \sum_{y=-64}^{y=64} \sum_{x=-64}^{x=64} f(x, y, z) \square x \square y \square z \text{ 且 } x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta = p \tag{6}$$

根据式 (6) 就可以计算任意  $(\varepsilon, p)$  确定的积分平面的 Radon 值； $(\varepsilon, p)$  在定义域区间逐步改变，则整个空间所有方向的平面积分，就构成了函数  $f(x)$  的 3D Radon 变换。取采样间隔为 1，则时间复杂度为  $O(N^6)$ ，可以想象，计算是相当费时的。

### 2.2 傅里叶变换法

Salvatore<sup>[6]</sup> 提出了一种通过傅里叶变换计算 3D Radon 变换的方法。该方法主要分两步：首先，对函数  $f(x)$  采样，划分成沿轴向的一系列平面，对每一个平面做二维傅里叶变换，然后插值到极坐标表示，再沿极轴方向做一维傅里叶逆变换，得到  $P(r, \theta, z)$ ；第二步，把沿  $z$  方向的一系列平面数据  $P(r, \theta, z)$  通过重排，转换成  $P(r, z, \theta)$ ，再分别通过二维 FT 和一维 IFT 就得到了函数的 3D Radon 变换，表示为  $\hat{f}(p, \varphi, \theta)$ ，见图 3。

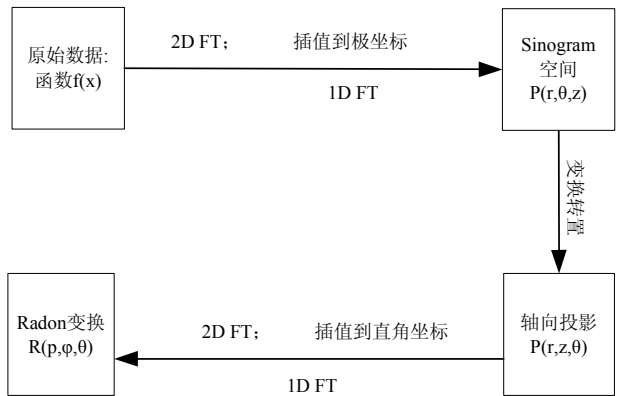


图 3 3D Radon 变换的傅里叶计算方法

这种方法直接求积分计算 Radon 变换，速度有很大提高，但是在频域有两次插值，当由频域变回到时域时，引起的误差较大，因此这种方法的精度较差，只适用于对准确度要求不是很高的时候。

### 3 3D Radon 变换的快速解析方法

本文在研究 3D Radon 变换的计算机实现中，受 2D Radon 变换几何求解方法的启发<sup>[6]</sup>，实现了一种解析方法快速得到物体函数 Radon 变换，这种快速方法跟物体函数  $f(\bar{x})$  相关。因为目前锥束图像仿真算法大都以 Shepp-Logan 椭球模型为研究对象，本文就推导了物体函数  $f(x, y, z)$  为椭球模型的 3D Radon 变换几何方法，不足之处是当函数模型变化时，求解公式需要重新推导，而通过迭代的积分方法不受此限制。

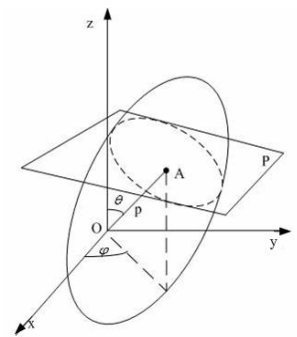


图 4 椭球模型 3D Radon 变换几何解法示意图

### 3.1 算法原理

如图 4, 物体坐标系为  $xyz$ , 平面  $P$  由垂直于此平面的向量  $(p, \varphi, \theta)$  确定, 点  $A$  是原点到平面  $P(p, \varphi, \theta)$  的垂足, 如果空间中任意位置椭球  $f(x, y, z)$  与平面  $P$  相交, 那么  $A$  点的 Radon 值就是在函数  $f(x, y, z)$  这个截面的面积分。不考虑物理因素, 对单个椭球模型这个值就是它的截面积; 如果不相交, 则此点的 Radon 变换值为 0。

椭球绕  $z$  轴旋转  $\alpha$ , 平移  $(x_0, y_0, z_0)$  位置之后的方程为:

$$\frac{(x \cos \alpha + y \sin \alpha - x_0)^2}{a^2} + \frac{(-x \sin \alpha + y \cos \alpha - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

平面方程为:  $k_1 x + k_2 y + k_3 z = p$  (7)

$(k_1, k_2, k_3)$  代表平面法向量及  $p$  代表平面到原点的距离, 它们满足式 (8)。椭球与积分平面关系如图 4。

$$\varepsilon = (k_1, k_2, k_3) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (8)$$

式 (5) 式 (6) 联立消去  $z$ , 可得到积分平面在  $xoy$  面的投影椭圆方程, 根据截面面积公式,  $S_{\text{截面}} = S_{\text{投影}} / \cos \theta$ , 可以由投影面积求截面面积, 即积分平面面积。下面关键是  $S$  投影的计算, 它的表达式形如:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = 1 \quad (9)$$

对于形如式 (9) 的椭圆方程面积, 计算步骤如下。

首先令:  $\begin{cases} x = u + m \\ y = v + n \end{cases}$  代入方程, 消去  $u, v$  的一次项,

$$au^2 + bv^2 + u(2am + cn + d) + v(2bn + cm + e) + cuv = 1 - am^2 - bn^2 - cmn - dm - en$$

令  $u, v$  的一次项等于 0, 则有:

$$\begin{cases} 2am + cn + d = 0 \\ 2bn + cm + e = 0 \end{cases} \quad (10)$$

解得:  $m = \frac{ce - 2bd}{4ab - c^2} \quad n = \frac{cd - 2ae}{4ab - c^2}$  (11)

变为求解方程  $Au^2 + Buv + Cv^2 = 1$  (12)

面积, 然后对式 (12) 进行二次型化标准型:

$$\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - \frac{B^2}{4A} \end{bmatrix}$$

$$Ax^2 + (C - \frac{B^2}{4A})y^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{1/A} + \frac{y^2}{1/(C - B^2/4A)} = 1 \quad (13)$$

最后, 对于每一个点的 Radon 变换积分平面:

$$S = \pi \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{\frac{1}{C - B^2/4A}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4AC - B^2}} \quad (14)$$

### 3.2 计算机仿真实现

根据上面推导的公式 (14), 对物体所有点进行 Radon 变换, 以 4 个椭球模型实现的 3D Radon 变换, 如图 7。覆盖空间网格大小  $128 \times 128 \times 128$ ,  $\varphi$ 、 $\theta$  方向采样点为 180。

表 1 椭球仿真模型参数

模型编号	中心坐标 (x, y, z)	半轴长度 (a, b, c)	转角 $\varphi$ /度	密度
1	0.22, 0, -0.25	0.11, 0.31, 0.22	-18	0.33
2	-0.22, 0, -0.25	0.16, 0.41, 0.21	-18	0.33
3	0, 0.35, -0.25	0.21, 0.25, 0.35	0	-0.17
4	0, 0.1, -0.25	0.46, 0.46, 0.46	0	-0.17

注: 模型定义在单位 1 内, 计算机仿真单位为像素, 探测器分辨率 1/64



从左至右依次为表 1 中 4 个模型的 3D Radon 变换空间  $(p, \theta)$  截面图像

图 5 椭球模型的 3D Radon 变换  $(p, \theta)$  截面

接下来, 把这种几何方法与直接积分法求 3D Radon 变换所需时间作一比较, 可以看出变换时间明显缩短。如下表 2。

计算机软硬件环境为:

- (1) Intel Pentium 4 CPU 3.2 GHz,  
1 GB 内存
- (2) VC++6.0 编程平台

表 2 两种方法 3D Radon 变换所需时间比较

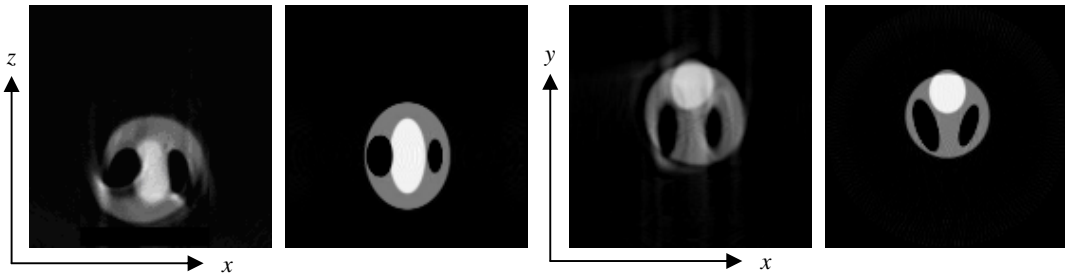
两种方法比较	不同空间网格大小 3D Radon 变换时间 重建每幅图像时间/ms		
	$64^3$	$128^3$	$256^3$
直接积分方法	297	2 234	17 562
几何变换方法	27	67	222

### 3.3 在图像重建中的应用

在得到了一个物体的 3D Radon 变换之后, 就可以应用 3D Radon 逆变换重建原物体, 完成三维图像重建。3D Radon 逆变换为<sup>[6]</sup>:

$$f(x) = \frac{-1}{8\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \hat{f}(\varepsilon, p)|_{p=x.\varepsilon} \sin\theta d\varphi d\theta \quad (15)$$

对于这个式子，可以利用 Marr<sup>[7]</sup>提出的两步反投影重建法来实现。首先，3D Radon 数据插值到垂直平面，对每一个垂直平面进行二维重建，然后对这些垂直平面重排，对体积图像的每一个水平平面完成二维重建。下图是用傅里叶变换方法和本文提出的几何方法分别对表 1 椭球模型进行 3D Radon 变换，再用 Marr 的两步反投影重建的结果。



左右侧分别为傅里叶变换方法和本文的方法重建结果，取 75 层  $xoz$  截面和 47 层  $xoy$  截面的图像

图 6 椭球模型重建结果

## 4 结论

本文对 Radon 变换数学、几何意义及其实现方法给出了详细描述，在传统方法的基础上，推导并实现了一种基于椭球模型的快速 3D Radon 变换的解析方法，并通过与积分方法、傅里叶变换方法相比较，分析了这种 Radon 变换新方法的优缺点。与直接积分方法相比，用解析方法实现 3D Radon 变换要快得多，可以和傅里叶方法媲美，却不会带来频域空间插值造成的较大误差。然而它却受到椭球模型的限制，不过 CT 算法研究常用 Shepp-Logan 模型，所以本文的 3D Radon 变换解析方法对研究图像重建、仿真验证算法方面仍有重要作用，对于 3D Radon 变换相关的科学领域研究也有重要意义。

## 参考文献

- [1] 沈操, 牛滨华, 于钦范. Radon 变换的 Matlab 实现[J]. 物探化探计算技术, 2000, 22(4): 124-128.
- [2] 宋一中, 贺安之. Radon 变换的计算机模拟[J]. 光电子激光, 2006, 17(4): 484-487.
- [3] 毛希平, 康克军. 一种确定三维锥束 CT 精确重建域的方法[J]. 清华大学学报, 2000, 40: 19-23.
- [4] 邸燕, 常宏宇. Radon 变换在断层成像中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(12): 57-60.
- [5] 闵琦.  $\delta$  函数的定义及其性质[J]. 大学物理, 2004, 23(9): 24-28.
- [6] 杨民. 与转轴任意相交角下的 CT 改进算法——预处理、校正与滤波卷积反投影[M]. 华北工学院硕士论文, 2000: 29-37.
- [7] Lanzavecchia S, Bellon P L. Fast computation of 3D Radon transform via a direct Fourier method[J]. Bioinformatics, 1998, 14: 212-216.
- [8] Marr R B, Chen C N, Lauterbur P C. On two approaches to 3D reconstruction in NMR zeugmatography[J]. Mathematical Aspects of Computerized Tomography, 1980, 225-240.

- [9] Axelsson C, Danielsson PE. Three dimensional reconstruction from cone beam data in  $O(N^3 \text{Log}N)$  time[J]. Phys Med Biol, 1994, 39: 477-491.

## Fast Computation of 3D Radon Transform Via a Geometrical Method

XU Hai-jun, WEI Dong-bo, FU Jian, ZHANG Li-kai, DAI Xiu-bin

Department of Mechanical Engineering and Automation,  
Beihang University, Beijing 100083, China

**Abstract:** Exact three-dimensional reconstruction algorithms are usually based on the three-dimensional Radon transform which is also widely used in other related fields. However, Radon transform consists of all Radon values placed at the corresponding points. Each value is defined as a plane integral in the object domain. So, the computation of Radon value is rather time expensive using direct integral method. New applications based on it may become convenient if a fast and efficient transformation algorithm is adopted. Therefore, an analytical method is proposed to compute the 3D Radon transform in this paper that is based on 3D S-L phantom including spheres and further compare it with the traditional algorithms of their advantages and disadvantages. Finally, the origin object reconstructed by 3D inverse Radon transform has been proved right by the result from computer simulation.

**Keywords:** 3D radon transform; X-CT; image reconstruction; inverse radon transform

**作者简介:** 徐海军 (1983—), 男, 北京航空航天大学机械电子工程专业数字图像处理与无损检测方向硕士生, 主要从事 X 射线断层重建算法及工业 CT 图像处理相关研究, Tel: 010-82338671, E-mail: xuhaijun@me.buaa.edu.cn。