

闫慧文, 乔志伟. 基于 ASD-POCS 框架的高阶 TpV 图像重建算法[J]. CT 球论与应用研究, 2021, 30(3): 279-289. DOI:10.15953/j.1004-4140.2021.30.03.01.
YAN H W, QIAO Z W. High order TpV image reconstruction algorithms based on ASD-POCS framework[J]. CT Theory and Applications, 2021, 30(3): 279-289. DOI:10.15953/j.1004-4140.2021.30.03.01. (in Chinese).

基于 ASD-POCS 框架的高阶 TpV 图像重建算法

闫慧文, 乔志伟[✉]

(山西大学计算机与信息技术学院, 太原 030006)

摘要: 总变差 (TV) 最小化模型目前已广泛应用于图像重建领域, 其通过最小化一阶图像梯度大小变换的 L1 范数实现, 能在稀疏投影采集下得到精确的重构。然而, TV 模型是基于分段平滑的图像的假设提出的, 有时会产生阶梯效应。研究发现, 高阶总变差 (HOTV) 模型可以有效压制阶梯效应, 提高重建精度。此外, TpV 模型使用 L_p 范数来逼近 L_0 范数, 有望进一步提高稀疏重建能力。鉴于此, 本文将 HOTV 模型与 TpV 模型结合, 提出一种新的高阶 TpV (HOTpV) 重建模型, 采用自适应梯度下降-投影到凸集 (ASD-POCS) 算法进行求解, 分别在理想和有噪声条件下对灰度渐变仿真模体以及真实 CT 图像仿真模体进行稀疏重建实验。实验结果显示, 相比于 TV、TpV 以及 HOTV 三种重建模型, HOTpV 能得到精度最高的图像。

关键词: 高阶总变差; 稀疏重建; 压缩感知; ASD-POCS 算法

DOI:10.15953/j.1004-4140.2021.30.03.01 中图分类号: O 242; TP 391.41 文献标志码: A

自 1973 年计算机断层成像 (computed tomography, CT) 技术诞生以来, CT 在医疗诊断以及工业无损检测中得到了广泛的应用。以滤波反投影 (filtered back projection, FBP) 算法^[1] 为代表的解析法是一类经典的医学图像重建算法。然而, 当投影数据不满足 Nyquist 采样要求时, 使用滤波后的反投影算法重建 X 射线 CT 图像就不可避免得会产生条纹伪影^[2]。随着压缩感知 (compressed sensing, CS) 理论^[3] 的提出, 迭代法逐渐成为重建领域中的一个研究热点, 这是由于通过假设, CT 图像可以用分段常数函数很好地逼近, 其在梯度变换域中表现出稀疏性。基于该理论, Sidky 等^[4] 于 2006 年提出了一种经典的迭代式重建算法, 即总变差 (total variation, TV) 最小化算法。近年来, TV 在扇形束 CT^[4]、锥形束 CT^[5]、C-arm CT^[6]、短扫描 CT^[7]、正电子发射成像 (positron emission tomography, PET)^[8] 及电子顺磁共振成像 (electron paramagnetic resonance imaging, EPRI)^[9] 中均展现了其高精度图像重建能力。

然而, TV 算法会将平滑区域也转换为分段常数区域, 因此有时会引入不理想的阶梯效应, 此现象在图像恢复以及图像去噪中则更加显著。为解决该问题, 2000 年, Chan 等^[10] 提出一种用于图像恢复的高阶总变差 (high-order total variation, HOTV) 模型, 该模型明显减少了阶梯效应, 同时更好地保留了边缘信息。2013 年, Zhang 等^[11] 提出 TV 与 HOTV

收稿日期: 2021-01-10。

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (62071281); 山西省重点研发计划 (201803D421012); 山西省留学人员科技活动项目 (RSC1622); 山西省回国留学人员科研资助项目 (2020-008)。

结合的图像重建复合模型，通过对加权函数的控制克服了单纯使用 TV 方法的缺点。2017 年，胡悦等^[12]针对 HOTV 模型运算复杂度高，耗时长的缺点，将增广拉格朗日乘子引入 HOTV 图像去噪中，在保留了图像细节等信息的基础上提高了算法的运行速度。2020 年，席雅睿等^[13]提出了一种 HOTV 图像重建模型，同时采用 Chambolle-Pock (CP) 算法对其进行求解，有效压制了 TV 算法引入的阶梯效应。

此外，TV 算法通过最小化图像的 L1 范数实现^[14]，其稀疏重建能力有限。理论上，正则化距离 L0 越近，重建中得到的图像质量越高，但是 L0 范数问题是典型的 NP 难问题。于是 2014 年，Sidky 等^[15]提出了约束总 p 变差 (total p -variation, TpV, $0 < p \leq 1$) 最小化重建模型，使用 L_p 范数近似 L0 范数，利用图像梯度幅值的稀疏性，在明显降低 CT 投影数据采样率的情况下进行了精确的图像恢复。2017 年，Cai 等^[16]提出一种新的基于 TpV 的重建模型，将 TpV 与 kullback-leibler (KL) 数据散度结合，与常用的二次项相比，具有更好的噪声抑制能力。2018 年，Ma 等^[17]将自适应 L_p 范数用于电容层析成像 (electrical capacitance tomography, ECT) 中，在节省了采样时间的同时提升了图像质量。同年，宋洁等^[18]利用交替方向乘子-Lp (alternating direction method of multipliers-Lp, ADMM-Lp) 算法实现了对非凸优化模型的求解，证明了 L_p 范数的稀疏重建能力。

鉴于上述 HOTV 和 TpV 模型的优点，本文拟将 HOTV 和 TpV 模型进行糅合，将 L_p 范数引入 HOTV 重建模型，提出一种高阶 TpV (high-order total p -variation, HOPV)

重建模型，并设计自适应梯度下降-投影到凸集 (adaptive steepest descent-projection onto convex sets, ASD-POCS) 算法对其进行模型的求解。通过正确性实验对 HOPV 重建模型及其计算机实现进行正确性验证，采用灰度渐变仿真模体和真实 CT 图像仿真模体进行 HOPV 稀疏重建，并对 TV、TpV、HOTV 以及所设计的 HOPV 模型的稀疏重建能力进行系统的比较。

1 高阶 TpV 重建模型与算法

不失一般性，本文以平行束 CT 重建为研究背景。在本部分中，以“成像系统模型-最优化重建模型-模型求解算法-图像质量评价标准”这一方法链展开重建方法描述。

1.1 D2D (Discrete to Discrete) 成像系统模型

二维平行束 CT 的离散成像模型为：

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad (1)$$

其中投影数据向量 \mathbf{g} 的长度为 M ，每个测量值为 g_i , $i=1, 2, \dots, M$ ；待求图像以离散形式表示为 \mathbf{f} ，其向量长度为 N ，元素表示为 f_j , $j=1, 2, \dots, N$ ；系统矩阵 \mathbf{A} 由产生每个数据点的 M 行向量 \mathbf{A}_i 组成，其矩阵大小为 $M \times N$ ， \mathbf{A} 中元素表示为 A_{ij} ，本文中系统矩阵采用射线驱动模型^[19]求解，因此 \mathbf{A}_{ij} 指的是第 i 条射线穿过第 j 个像素的长度。

一般情况下，系统矩阵是非常庞大的、欠定的、甚至是病态的，因此线性系统方程 (1) 的解无法通过对其直接求逆进行运算，需进一步将其建模为一个最优化问题。

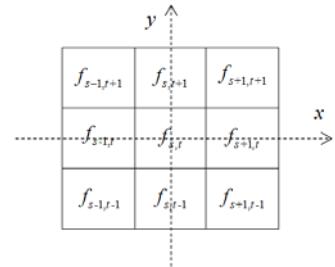


图 1 $f_{s,t}$ 相邻像素位置关系

Fig. 1 Position relation of $f_{s,t}$ adjacent pixels

1.2 HOTpV 最优化模型

HOTpV 模型能有效压制 TV 模型引入的阶梯伪影，同时其利用 Lp 范数代替 L1 范数，有比 HDTV 模型更强的稀疏约束能力，其最优化重建模型可以表示为：

$$\mathbf{f}' = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{f}\|_{\text{HOTpV}} \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|_2 \leq \varepsilon \quad (2)$$

其中 \mathbf{f}' 为待测图像， $\|\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|_2 \leq \varepsilon$ 表示数据保真项， ε 为数据容差限，表示投影数据和系统的不一致性； $\|\mathbf{f}\|_{\text{HOTpV}}$ 为正则项，表示高阶梯度大小变换 $|\nabla^2 \mathbf{f}|$ 的 Lp 范数，其中 $|\nabla^2 \mathbf{f}|$ 定义为：

$$|\nabla^2 \mathbf{f}| = \sqrt{f_{xx}^2 + f_{xy}^2 + f_{yx}^2 + f_{yy}^2} \quad (3)$$

如果用 $f_{s,t}$ 标记某像素值，给定图 1 所示的坐标网格及其相邻像素之间的位置关系，则式(3)可通过式(4)~式(7)计算得出。

$$f_{xx} = (f_{s,t} - f_{s-1,t}) - (f_{s-1,t} - f_{s-2,t}) = f_{s,t} - 2f_{s-1,t} + f_{s-2,t} \quad (4)$$

$$f_{xy} = (f_{s,t} - f_{s-1,t}) - (f_{s,t-1} - f_{s-1,t-1}) = f_{s,t} - f_{s-1,t} - f_{s,t-1} + f_{s-1,t-1} \quad (5)$$

$$f_{yx} = (f_{s,t} - f_{s,t-1}) - (f_{s-1,t} - f_{s-1,t-1}) = f_{s,t} - f_{s,t-1} - f_{s-1,t} + f_{s-1,t-1} \quad (6)$$

$$f_{yy} = (f_{s,t} - f_{s,t-1}) - (f_{s,t-1} - f_{s,t-2}) = f_{s,t} - 2f_{s,t-1} + f_{s,t-2} \quad (7)$$

那么 $\|\mathbf{f}\|_{\text{HOTpV}}$ 就可以表示为：

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|_{\text{HOTpV}} &= \left\| \nabla^2 \mathbf{f} \right\|_p^p = \sum_{s,t} |\nabla^2 \mathbf{f}|^p = \\ &\sum_{s,t} \left(\left((f_{s,t} - f_{s-2,t} - 2f_{s-1,t})^2 + 2(f_{s,t} - f_{s-1,t} - f_{s,t-1} + f_{s-1,t-1})^2 + (f_{s,t} - 2f_{s,t-1} + f_{s,t-2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^p \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\|\cdot\|_p^p$ 为某向量 Lp 范数的 p 次方，p 值取值范围为 (0, 1)。当 p 值等于 1 时，上述方法退化为 HDTV 算法^[20]。

1.3 HOTpV 图像重建模型的 ASD-POCS 求解算法

ASD-POCS 算法框架是 2008 年 Sidky 等^[5]基于压缩感知理论提出的一种基于约束 TV 最小化的图像重建迭代算法，该算法采用凸集投影（POCS）增强图像约束，并利用最速下降法将图像 TV 最小化，本文基于此框架实现对 HOTpV 模型的求解。

对式(8)进行求导，可得 $\|\mathbf{f}\|_{\text{HOTpV}}$ 对图像中的每一个像素的偏导数为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\mathbf{f}\|_{\text{HOTpV}}}{\partial f_{s,t}} &= p * \left(\left(f_{s,t} + f_{s-2,t} - 2f_{s-1,t} \right)^2 + 2 \left(f_{s,t} - f_{s-1,t} - f_{s,t-1} + f_{s-1,t-1} \right)^2 + \left(f_{s,t} - 2f_{s,t-1} + f_{s,t-2} \right)^2 + e \right)^{\frac{p-2}{2}} * \\ &\quad \left(4f_{s,t} + f_{s-2,t} - 4f_{s-1,t} - 4f_{s,t-1} + 2f_{s-1,t-1} + f_{s,t-2} \right) + \\ p * &\left(\left(f_{s+2,t} + f_{s,t} - 2f_{s+1,t} \right)^2 + 2 \left(f_{s+2,t} - f_{s+1,t} - f_{s+2,t-1} + f_{s+1,t-1} \right)^2 + \left(f_{s+2,t} - 2f_{s+2,t-1} + f_{s+2,t-2} \right)^2 + e \right)^{\frac{p-2}{2}} * \\ &\quad \left(f_{s+2,t} + f_{s,t} - 2f_{s+1,t} \right) + \\ p * &\left(\left(f_{s+1,t} + f_{s-1,t} - 2f_{s,t} \right)^2 + 2 \left(f_{s+1,t} - f_{s,t} - f_{s+1,t-1} + f_{s,t-1} \right)^2 + \left(f_{s+1,t} - 2f_{s+1,t-1} + f_{s+1,t-2} \right)^2 + e \right)^{\frac{p-2}{2}} * \end{aligned} \quad (9-1)$$

$$\begin{aligned}
& \left(-4f_{s+1,t} + 6f_{s,t} - 2f_{s-1,t} + 2f_{s+1,t-1} - 2f_{s,t-1} \right) + \\
& p * \left(\left(f_{s,t+1} + f_{s-2,t+1} - 2f_{s-1,t+1} \right)^2 + 2 \left(f_{s,t+1} - f_{s-1,t+1} - f_{s,t} + f_{s-1,t} \right)^2 + \left(f_{s,t+1} - 2f_{s,t} + f_{s,t-1} \right)^2 + e \right)^{\frac{p-2}{2}} * \\
& \left(-4f_{s,t+1} + 6f_{s,t} + 2f_{s-1,t+1} - 2f_{s-1,t} - 2f_{s,t-1} \right) + \\
& p * \left(\left(f_{s+1,t+1} + f_{s-1,t+1} - 2f_{s,t+1} \right)^2 + 2 \left(f_{s+1,t+1} - f_{s,t+1} - f_{s+1,t} + f_{s,t} \right)^2 + \left(f_{s+1,t+1} - 2f_{s+1,t} + f_{s+1,t-1} \right)^2 + e \right)^{\frac{p-2}{2}} * \quad (9-2) \\
& 2 \left(f_{s+1,t+1} - f_{s,t+1} - f_{s+1,t} + f_{s,t} \right) + \\
& p * \left(\left(f_{s,t+2} + f_{s-2,t+2} - 2f_{s-1,t+2} \right)^2 + 2 \left(f_{s,t+2} - f_{s-1,t+2} - f_{s,t+1} + f_{s-1,t+1} \right)^2 + \left(f_{s,t+2} - 2f_{s,t+1} + f_{s,t} \right)^2 + e \right)^{\frac{p-2}{2}} * \\
& \left(f_{s,t+2} - 2f_{s,t+1} + f_{s,t} \right)
\end{aligned}$$

其中 e 是一个很小的正整数，在本文的算法中 $e = 10^{-8}$ ，值得注意的是，该表达式对外面两层像素是无效的。在实际算法中，采用归一化的 HOTpV 梯度，算法的伪代码如表 1 所示。

基于 ASD-POCS 框架的 HOTpV 重建算法实现了式（2）中描述的从投影数据重建图像的优化程序。算法中每次最外层循环均由两部分构成：POCS 和 ASD，POCS 部分为第 5~6 行，通过代数重建技术（algebraic reconstruction technique, ART）和正向投影实现了数据的一致性约束，ASD 部分为第

13~17 行，用于最小化图像的 HOTpV 范数，其中第 14 行梯度的计算由式（9）计算得出。

该算法依赖于 POCS 阶段和梯度下降之间的平衡，通过用 dtvg 缩放梯度下降步长，使得 POCS 和梯度下降部分保持了这种平衡。只要梯度下降引起的图像总变化（dg）不超过 POCS 引起的图像总变化（dp），整体迭代步骤将使图像估计更接近成像线性系统的解空间。关于此算法的更多参数解释，请参考文献^[5]。

1.4 图像质量评价标准

为了更好地对实验结果进行定量比较，本文采用均方根误差（root mean square error, RMSE）和峰值信噪比（peak signal to noise ratio, PSNR）作为评价指标，计算表达式如下：

表 1 基于 ASD-POCS 框架的 HOTpV 重建算法
Table 1 HOTpV reconstruction algorithm based on ASD-POCS framework

算法 1：基于 ASD-POCS 框架的 HOTpV 重建算法

```

1: Initialization:  $\beta = 1.0$ ;  $\beta_{\text{red}} = 0.995$ ;  $ng = 20$ ;  $\alpha = 0.2$ ;  $r_{\max} = 0.95$ ;  $\alpha_{\text{red}} = 0.95$ 
2:  $f = 0$ 
3: repeat main loop
4:    $f_0 = f$ 
5:   for  $i = 1:N_d$  do  $f = f + \beta A_i \frac{g_i - A_i \cdot f}{A_i \cdot A_i}$  POCS (ART)
6:   for  $i = 1:N_f$  do if  $f_i < 0$  then  $f_i = 0$  Enforce Positivity
7:    $f_{\text{res}} = f$ 
8:    $g = Af$ 
9:    $dd = \|g - g_0\|$ 
10:   $dp = \|f - f_0\|$ 
11:  if {first iteration} then  $dtvg = \alpha * dp$ 
12:   $f_0 = f$ 
13:  for  $i = 1:ng$  do HOTpV-ASD loop
14:     $df = \nabla_f \|f\|_{\text{HOTpV}}$ 
15:     $df = df / \|df\|_2$ 
16:     $f = f - dtvg * df$ 
17:  end for
18:   $dg = \|f - f_0\|_2$ 
19:  if  $dg > r_{\max} * dp$  and  $dd > \varepsilon$  then  $dtvg = dtvg * \alpha_{\text{red}}$ 
20:   $\beta = \beta * \beta_{\text{red}}$  (公式错误无法修订，已修改)
21:  until{stopping criteria}
22:  return  $f_{\text{res}}$ 

```

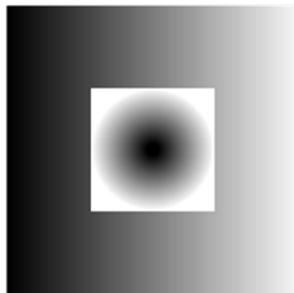
$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (f_i - f'_i)^2}{N}} \quad (10)$$

$$\text{PSNR} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{(2^n - 1)^2}{\text{MSE}} \right) \quad (11)$$

式(10)中 f_i 表示待重建图像, f'_i 表示真值图像, N 为图像的像素总数。式(11)中角标 n 是每个采样值的比特数, MSE由式(10)的平方计算得到。RMSE用来衡量重建图像与真实图像之间的偏差, 值越大说明重建效果越差; PSNR作为一种全局的质量评价标准, 值越大表明图像失真越小, 重建结果越好。

2 实验结果与分析

本节主要包括两部分内容: ①采用正确性实验对 HOTpV 重建模型及所设计的 ASD-POCS 算法进行正确性验证; ②对如图 2 所示的灰度渐变仿真模体和真实 CT 图像仿真模体进行稀疏重建, 比较 TV、TpV、HOTV 以及所设计模型的稀疏重建能力。



(a) 灰度渐变仿真模体



(b) 真实 CT 图像仿真模体

图 2 真值图像

Fig. 2 Simulation phantom

2.1 正确性研究

优化模型及其算法实现需要进行正确性验证, 以保证模型、算法及其计算机实现是完全正确的。所谓正确性验证, 即在投影数据足够理想且充分的条件下, 倘若重建结果图像与真值图像之间的误差可以充分小, 那么我们就认为正确性实验成功^[14]。

在本节中, 采用经典的 Shepp-Logan 模体来实现对 HOTpV 重建算法的正确性研究。模体大小为 128×128 , 旋转中心为 [64, 64], 探测器探元个数为 128, 图像像素大小和探测器探元大小均为 1, 在 $[0, \pi]$ 范围内均匀选取 360 个投影角度的数据进行重建实验。另外, 我们设定算法的收敛条件为 $\text{RMSE}(f', f) \leq 10^{-6}$, 实验过程中的 p 值选取为 0.1, 实验迭代次数为 1 000 次, 则重建结果如图 3 所示。

图 3 中显示了正确性实验的重建结果, 由图 3 (a) 和图 3 (b) 可以看出, HOTpV 算法的重建结果图像与 Shepp-Logan 模体的真值图像用肉眼几乎无法分别。另外, 图 3 (c) 和图 3 (d) 展示了结果图像与真值图像垂直及水平方向上的中心剖线, 图中显示两条曲线均高度重合, 证明了本文提出的 HOTpV 优化模型有着较强的重建能力。

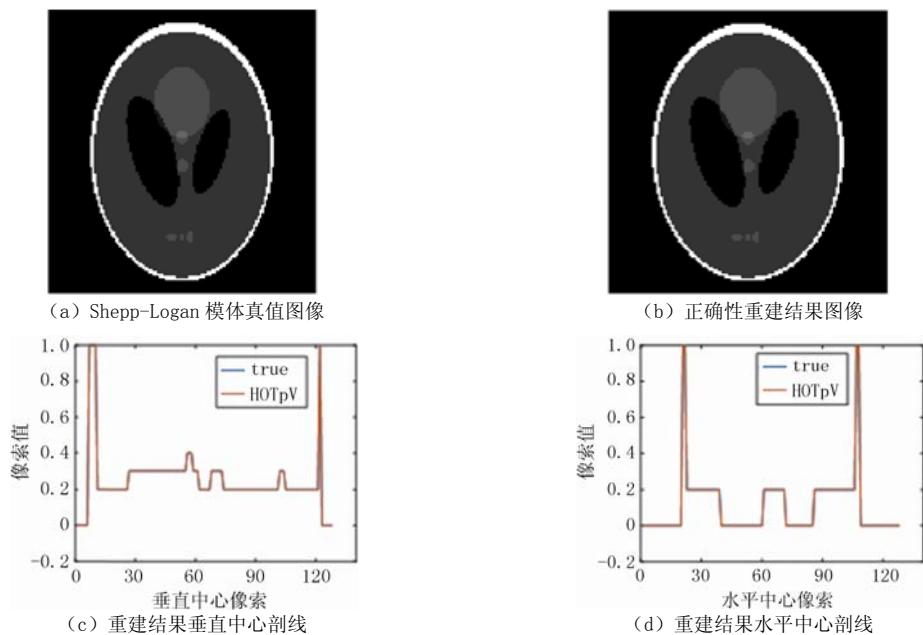
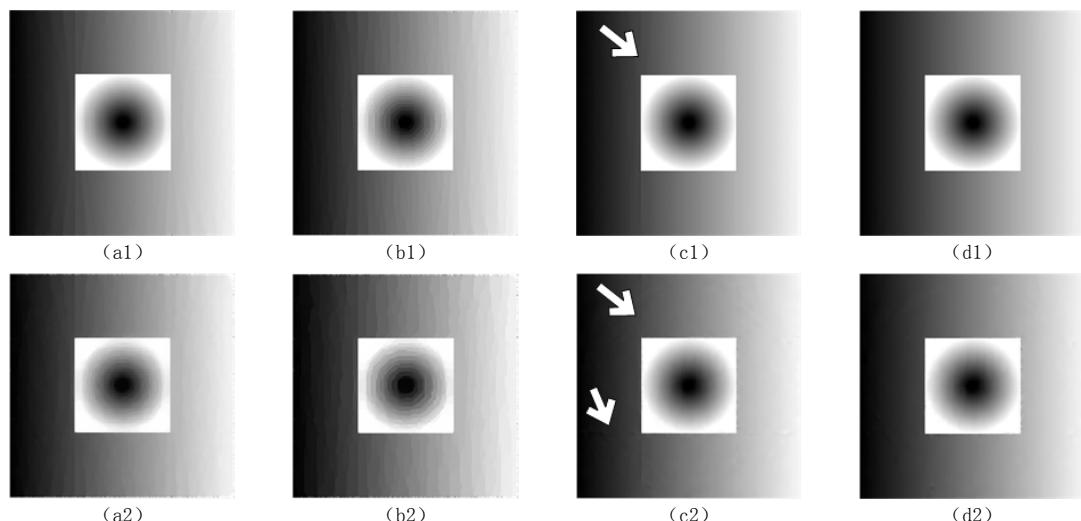


图 3 正确性实验重建结果
Fig. 3 Reconstructing the results of Correctness experiments



注: (a) TV 算法重建结果; (b) TpV 算法重建结果; (c) HOTV 算法重建结果; (d) HOpV 算法重建结果。第 1 行为无噪声条件下的重建图像, 第 2 行为含噪投影数据重建的图像。

图 4 灰度渐变仿真模体的重建结果
Fig. 4 The reconstruction results of the grayscale gradual simulation phantom

此外, 在重建过程中, 当仅迭代至 201 次时, 重建结果的 RMSE 值就达到了 9.373 e^{-7} , 满足了既定的收敛条件, 经过 1 000 次迭代重建后, 其重建精度已达到了 1.971 e^{-8} , 表明正确性实验成功, 同时也证明了该模型及其求解算法的正确性。

2.2 灰度渐变仿真模体重建

为了验证 HOpV 优化模型的重建性能, 本节首先对如图 2 (a) 所示的灰度渐变仿真模

体进行了重建实验。该模体大小为 200×200 , 在 $[0, \pi]$ 范围内均匀采集 30 个视角下的投影数据进行重建实验。在实际扫描过程中, 不可避免得会引入噪声, 因此本文在理想的投影数据中加入均值为 0, 方差为 0.1 的高斯白噪声, 分别将所设计算法与 TV、TpV 以及 HOTV 算法在无噪以及含噪声条件下进行对比实验, 其中 TpV 和本文所提出的高阶 TpV 算法中的 p 值总是选择最优 p 值进行重建, 每种重建算法均迭代 500 次使之达到收敛, 重建结果如图 4 所示。

图 4 中显示了不同重建算法的重建结果图像。图中结果表明, 无论在理想还是含噪声投影数据重建的条件下, TV 和 TpV 算法在渐变仿真模体中均会引入较多的阶梯伪影, TpV 算法重建结果中阶梯伪影则更加严重。另外, 图 4 中 (c1) 和 (c2) 表明 HOTV 算法虽然可以压制绝大多数的伪影, 但其在解决灰度突变的边界时存在困难, 如图中白色箭头所示。而 HOTpV 算法在灰度渐变模体中表现出了优于其他 3 种重建算法的性能, 其重建结果在视觉上几乎与真值图像难以区分。

图 5 (a) 和图 5 (b), 展示了两种高阶算法重建结果图像水平方向上沿中心线的轮廓, 在第 50 个像素附近发现 HOTV 模型存在一些细小的失真, 而 HOTpV 模型的水平中心剖线则与真值图像几乎完全重合, 很好得解决了灰度突变带来的伪影。图 5 (c) 和图 5 (d) 研究了 TV 和 TpV 算法图像在水平方向上沿中心线的剖线, 其失真程度被清晰的显现出来。这与图 4 中我们所得出的结论一致, HOTpV 算法重建得到的结果图像最精确, 精度最高。

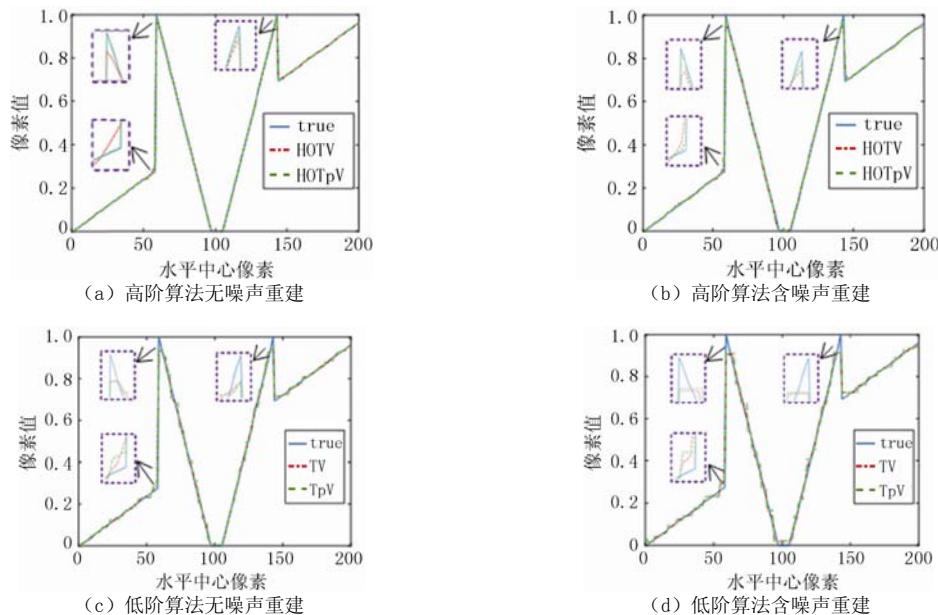


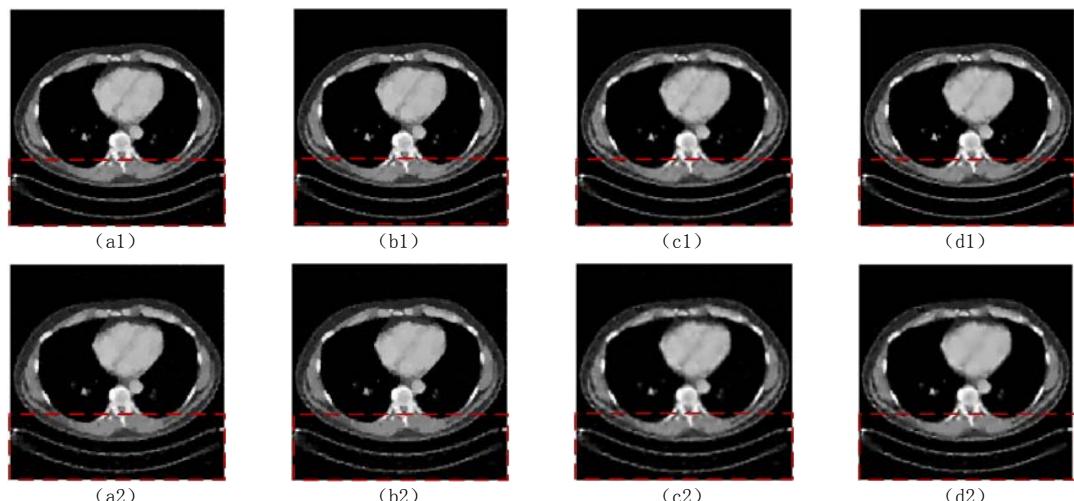
图 5 灰度渐变仿真模体重建结果水平中心剖线

Fig. 5 Horizontal profile of reconstructed results of grayscale gradual simulation phantom

表 2 中显示了灰度渐变仿真模体重建结果的 RMSE 和 PSNR 值。由表 2 可知, HOTpV 模型重建结果的 RMSE 值最小, PSNR 值最大, 这意味着 HOTpV 模型可以重建出与真值图像最接近的结果。

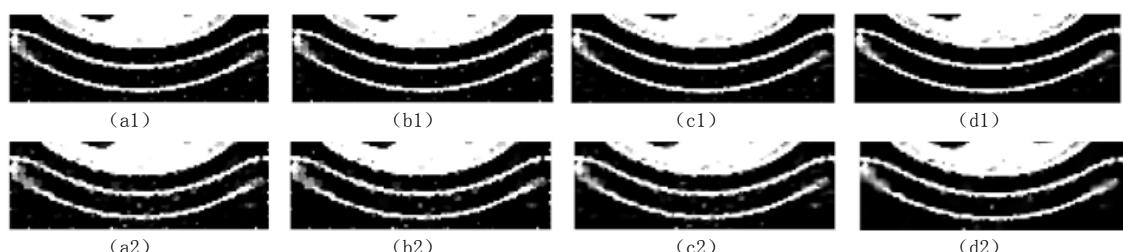
表 2 灰度渐变仿真模体重建结果的 RMSE 和 PSNR 分析
Table 2 RMSE and PSNR analysis of reconstruction results of grayscale gradual simulation phantom

重建条件	评价指标	算法			
		TV	TpV	HOTV	HOTpV
无噪	RMSE	0.007	0.009	0.003	0.001
	PSNR	43.679	40.699	50.365	59.347
有噪	RMSE	0.015	0.019	0.008	0.006
	PSNR	36.524	34.889	42.674	44.715



注: (a) TV 算法重建结果; (b) TpV 算法重建结果; (c) HOTV 算法重建结果; (d) HOTpV 算法重建结果。第 1 行为无噪声条件下的重建图像, 第 2 行为含噪投影数据重建的图像。

图 6 真实 CT 图像仿真模体重建结果
Fig. 6 The reconstruction results of the real CT image simulation phantom



注: (a) TV 算法重建结果; (b) TpV 算法重建结果; (c) HOTV 算法重建结果; (d) HOTpV 算法重建结果。第 1 行为无噪声条件下的重建图像, 第 2 行为含噪投影数据重建的图像。

图 7 图 6 中局部区域重建结果, 灰度窗为 [0, 0.2]
Fig. 7 The reconstruction results of local areas in Fig. 6, gray window is [0, 0.2]

2.3 真实 CT 图像仿真模体重建

为了进一步研究本文所提出的 HOTpV 优化模型的特性, 本节使用真实 CT 图像仿真模体进行重建实验, 其中图像大小为 128×128 , 如图 2 (b) 中所示, 其余重建条件与 2.2 节保

持一致，4种优化模型的重建对比结果如图6所示。

图6(a)和图6(b)显示TV以及TpV算法重建的图像噪声点较多，两种高阶模型重建结果图像质量不相上下，改变灰度窗为[0, 0.2]后(图7)，可以明显看出HOTpV优化模型中所含噪声点相较于其他3种算法明显减少，去噪效果最好。

表3中显示了真实CT图像仿真模体重建结果的RMSE和PSNR值，由表可知，HOTpV模型重建结果图像的RMSE和PSNR均优于TV、TpV、HOTV三种重建算法，因此HOTpV可以重建出噪声更小的图像，表明了其对噪声具有较强的鲁棒性。

表3 真实CT图像仿真模体重建结果的RMSE和PSNR分析

Table 3 RMSE and PSNR analysis of reconstruction results of the real CT image simulation phantom

重建条件	评价指标	算法			
		TV	TpV	HOTV	HOTpV
无噪	RMSE	0.039	0.039	0.038	0.036
	PSNR	43.679	40.699	50.365	59.347
有噪	RMSE	0.049	0.049	0.048	0.047
	PSNR	26.220	26.221	26.458	26.616

3 结语

本文结合高阶梯度与Lp范数提出了一种新的优化重建模型——HOTpV重建模型，并使用经典的ASD-POCS算法对其进行求解，利用经典的Shepp-Logan模体通过正确性实验对HOTpV模型及求解算法进行正确性验证，同时采用理想和含噪声投影数据对灰度渐变仿真模体和真实CT图像仿真模体进行重建实验。HOTpV模型使用图像的高阶导数使得其比TV类模型对图像的细节更加敏感，同时利用Lp范数的强稀疏性，在有效压制了TV模型引入的阶梯伪影的同时，能够用较少的投影数据重建出精度更高的图像。

本文所使用的ASD-POCS算法是从物理角度设计出来的，其含有较多的参数，在参数设置合理的情况下算法才会有较快的收敛速度。若使用Chambolle-Pock等算法进行求解，则可以避免算法参数的人为设定，这将成为本文后续要研究的内容。

参考文献

- [1] PAN X, SIDKY E Y, VANNIER M. Why do commercial CT scanners still employ traditional, filtered back-projection for image reconstruction? [J]. Inverse Problems, 2008, 25(12): 1230009.
- [2] 林泽田, 王单. 稀疏角度CT图像重建算法研究[J]. 计算机应用与软件, 2018, 35(10): 217-222, 311.
LIN Z T, WANG D. Research on sparse-view CT image reconstruction[J]. Computer Applications and Software, 2018, 35(10): 217-222, 311. (in Chinese).
- [3] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [4] SIDKY E Y, KAO C M, PAN X. Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT[J]. Journal of X-ray Science and Technology, 2006, 14(2): 119-139.
- [5] SIDKY E Y, PAN X. Image reconstruction in circular cone-beam computed tomography by

- constrained, total-variation minimization[J]. Physics in Medicine and Biology, 2008, 53(17): 4777.
- [6] XIA D, LANGAN D A, SOLOMON S B, et al. Optimization-based image reconstruction with artifact reduction in C-arm CBCT[J]. Physics in Medicine and Biology, 2016, 61(20): 7300.
- [7] ZHANG Z, HAN X, PEARSON E, et al. Artifact reduction in short-scan CBCT by use of optimization-based reconstruction[J]. Physics in Medicine and Biology, 2016, 61(9): 3387–3406.
- [8] ZHANG Z, YE J, CHEN B, et al. Investigation of optimization-based reconstruction with an image-total-variation constraint in PET[J]. Physics in Medicine and Biology, 2016, 61(16): 6055–6084.
- [9] QIAO Z W, ZHANG Z, PAN X C, et al. Optimization-based image reconstruction from sparsely sampled data in electron paramagnetic resonance imaging[J]. Journal of Magnetic Resonance, 2018, 294: 24–34. DOI:10.1016/j.jmr.2018.06.015.
- [10] CHAN T, MARQUINA A, MULET P. High-order total variation-based image restoration[J]. Siam Journal on Scientific Computing, 2000, 22(2): 503–516.
- [11] ZHANG Y, ZHANG W H, CHEN H, et al. Few-view image reconstruction combining total variation and a high-order norm[J]. International Journal of Imaging Systems and Technology, 2013, 23(3): 249–255.
- [12] 胡悦, 仲崇潇, 曹梦宇, 等. 基于增广拉格朗日乘子的快速高阶全变分图像去噪方法[J]. 系统工程与电子技术, 2017, 39(12): 2831–2839.
HU Y, ZHONG C X, CAO M Y, et al. Augmented lagrangian multiplier based fast higher degree total variation image denoising algorithm[J]. Systems Engineering and Electronics, 2017, 39(12): 2831–2839. (in Chinese).
- [13] 席雅睿, 乔志伟, 温静, 等. 基于 Chambolle-Pock 算法框架的高阶 TV 图像重建算法[J]. 计算机应用, 2020, 40(6): 247–252.
XI Y R, QIAO Z W, WEN J, et al. High order TV image reconstruction algorithm based on Chambolle-Pock algorithm framework[J]. Journal of Computer Applications, 2020, 40(6): 247–252. (in Chinese).
- [14] 乔志伟. 总变差约束的数据分离最小图像重建模型及其 Chambolle-Pock 求解算法[J]. 物理学报, 2018, 67(19): 362–376.
QIAO Z W. The total variation constrained data divergence minimization model for image reconstruction and its Chambolle-Pock solving algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2018, 67(19): 362–376. (in Chinese).
- [15] SIDKY E Y, CHARTRAND R, BOONE J M, et al. Constrained TpV minimization for enhanced exploitation of gradient sparsity: Application to CT image reconstruction[J]. IEEE Journal of Translational Engineering in Health and Medicine, 2014, 2(6): 1–18.
- [16] CAI A L, LI L, WANG L Y, et al. Image reconstruction for cone-beam computed tomography using total p-variation plus Kullback-Leibler data divergence[J]. Chinese Physics B, 2017, 26(7): 078701.
- [17] MA M, LI M, HE X F, et al. Research on ECT image reconstruction algorithm based on compression sensing and adaptive L_p norm[J]. Machine Tool and Hydraulics, 2018, 46(462): 31–37.
- [18] 宋洁, 陈平, 潘晋孝. 实现稀疏角度下的精确CT重建: 利用ADMM-LP算法求解非凸模型[J]. 中国组织工程研究, 2018, 22(31): 4998–5002.
SONG J, CHEN P, PAN J X, et al. Reconstruction accuracy of sparse angle CT imaging: ADMM-CT algorithm based on LP-norm[J]. Chinese Journal of Tissue Engineering Research, 2018, 22(31): 4998–5002. (in Chinese).
- [19] 郁浩伟, 乔志伟, 宋文琪, 等. 四种系统矩阵的建模方法在ASD-POCS算法中的比较[J]. 计算机应用研究, 2017, 34(7): 2228–2231.
TAI H W, QIAO Z W, SONG W Q, et al. Comparison of system modeling methods in ASD-POCS[J]. Application Research of Computers, 2017, 34(7): 2228–2231. (in Chinese).

[20] XI Y R, QIAO Z W, WANG W J, et al. Study of CT image reconstruction algorithm based on high order total variation[J]. Optik, 2020, 204: 163814. DOI:10.1016/j.ijleo.2019.163814.

High Order TpV Image Reconstruction Algorithms Based on ASD-POCS Framework

YAN Huiwen, QIAO Zhiwei[✉]

(School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: Total variation (TV) minimization model has been widely used in the field of image reconstruction. It can achieve accurate reconstruction under sparse projection acquisition by minimizing L1 norm of first-order image gradient size transformation. However, the TV model is based on the assumption of segmented smooth image, which sometimes leads to staircase effect. Researches show that the high-order Total Variation (HOTV) model can suppress the staircase effect effectively and improve the reconstruction accuracy. In addition, total p-variation (TpV, $0 < p \leq 1$) model uses L_p norm to approximate L_0 norm, which is expected to further improve the sparse reconstruction ability. In view of this, this paper combines HOTV model with TpV model, a new high-order TpV (HOTpV) reconstruction model is proposed, which is solved by adaptive steepest descent-projection onto convex sets (ASD-POCS) algorithm, sparse reconstruction experiments are carried out on grayscale gradual simulation phantom and real CT image simulation phantom under ideal and noisy conditions. The experimental results show that compared with TV, TpV and HOTV, HOTpV can get the highest accuracy image.

Keywords: high-order total variation (HOTV); sparse reconstruction; compressed sensing (CS); ASD-POCS



作者简介：闫慧文，女，山西大学计算机科学与技术专业硕士研究生，主要从事医学图像重建、图像处理等方面的研究，E-mail: 578705307@qq.com；乔志伟[✉]，男，博士，山西大学计算机与信息技术学院教授、博士生导师，主要从事电子顺磁共振成像、图像重建算法、高性能计算等方面的研究，E-mail: zqiao@sxu.edu.cn。

《CT 理论与应用研究》稿件要求

1. 所投稿件要求观点明确，论据可靠，层次分明，论述精练，语言准确，符合规范。
2. 缩写。外文缩写词必须符合国际规范，缩写在文中第一次出现时需要标明全称并说明中文含义。
3. 量、符号和单位，数值精度

期刊刊登论文中的量名称、量符号及其单位采用国家标准。量符号和代表变动性数字的符号，以及坐标轴的符号均排斜体；量符号的下标，属“变动性的”用斜体，其他情况用正体。量符号在文中首次出现时，必须给出其量名称及单位。向量、矩阵排黑斜体；张量排花斜体。单位名称及符号采用国际标准制，单位符号用正体。常用的数学符号（自然对数的底 e ，圆周率 π ，转置符 T ，微分符 d 等）排正体。文中提及的数值，除有特殊要求以外，一般精确到小数点后 3 位。

4. 图件

投稿稿件请附必要的图件。图件要求具有科学性，符合规范，清晰美观，能直接用于制版，图件的精度不小于 300 线。每幅图件注明唯一图号和图题，图题中英文对照，图号和图题在图的下方，用小五号宋体字。坐标轴以“量符号/单位”规范形式表示，如 f/Hz , $v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ 。图中内容要用六号宋体字。对于涉及国界的图件，必须符合我国规定的地图出版要求。必要时可加图注，图注用六号宋体字。

5. 表格

采用三线表，必要时可加辅线。表号和表题置于表的上方（小五号宋体字），表题中英文对照。表中量和单位的标示形式同图（六号宋体字）。

图表一般直接列于文中，也可另附图片文件。

6. 数据统计和模拟

论文中凡涉及数理统计或模型模拟的内容，须给出统计检验。如：“本文的结果与文献[1]的相同/高/低”，应给出单一样本均值的检验；如涉及两个总体的均值比较问题，应给出独立样本或配对样本均值的检验。如：论文涉及回归模型，应给出模型和模型参数检验，以及模型的拟合优度。

7. 参考文献

投稿稿件遵循著作权法，凡引用他人资料、数据、方法、图表以及结果、结论的，必须注明出处，列出文献。参考文献的著录格式采用“顺序编码制”，著录格式详见“《CT 理论与应用研究》投稿样式”（可向编辑部索取）。

8. 其他

请提交论文研究工作的基金来源、编号，以及 200 字以内第一作者和通信作者简介（见投稿样式）及 1 英寸照片。