

程凯, 杨雪芹, 孙怡. 基于非局部全核变分方法的稀疏角多能 CT 重建[J]. CT 理论与应用研究, 2020, 29(6): 663-676. DOI:10.15953/j.1004-4140.2020.29.06.04.  
CHENG K, YANG X Q, SUN Y. Nonlocal total nuclear variation based method for multi-energy CT image reconstruction[J]. CT Theory and Applications, 2020, 29(6): 663-676. DOI:10.15953/j.1004-4140.2020.29.06.04. (in Chinese).

## 基于非局部全核变分方法的稀疏角多能 CT 重建

程凯<sup>1</sup>, 杨雪芹<sup>2</sup>, 孙怡<sup>1✉</sup>

1. 大连理工大学信息与通信工程学院, 辽宁 大连 116024
2. 山西北方兴安化学工业有限公司, 太原 030023

**摘要:** 稀疏角采样与减小 X 射线源电流可有效降低多能谱 CT 低辐射剂量, 然而会导致投影数据不足且包含较大噪声, 重建图像会严重降质。针对这一问题, 本文对传统全核变分 (TNV) 正则化方法进行推广, 利用非局部梯度向量构成的雅克比矩阵的低秩特性, 提出非局部全核变分 (NLTV) 正则化方法。该方法用单个正则项同时建模能谱 CT 图像的结构相似性、梯度域稀疏性与非局部自相似性 3 种先验信息, 能恢复稀疏角度投影含较大噪声 (剂量较低) 时图像的结构特征, 并且有效缓解了用多正则项建模多能谱 CT 图像不同先验信息所导致的正则化参数过多问题。此外, 基于 NLTV 的重建模型为凸优化模型, 保证了算法的稳定性与收敛性。实验结果表明, 与 TNV 正则化方法相比, 本方法显著提升重建图像的整体质量。

**关键词:** 多能谱 CT 图像重建; 图导数; 非局部自相似性; 非局部全核变分方法; 凸优化模型

DOI:10.15953/j.1004-4140.2020.29.06.04 中图分类号: O 242; TP 391.41 文献标志码: A

多能 CT 与单能谱 CT 相比, 增加了能谱维度的信息, 可提高不同物质的区分性<sup>[1]</sup>, 然而与单能 CT 类似多能 CT 也存在辐射剂量问题。通过稀疏角度采样, 减小 X 射线源的电流, 可以有效降低多能 CT 辐射剂量。稀疏角度采样会导致数据不足, 引起重建伪影问题, 而减小 X 射线源的电流, 会导致重建图像易受到噪声干扰产生降质问题。由于不同能谱下的 CT 图像是对同一物体的结构进行表征, 具有相似的结构特征, 利用这种结构先验信息, 同时结合图像变换域的稀疏先验, 对多个能谱下的图像进行联合重建, 可有效克服上述问题。

为了有效利用以上先验信息, Gao 等<sup>[2]</sup>利用稳健主成分分析原理, 首先提出基于整体图像低秩与稀疏分解 (PRISM) 的多能谱 CT 重建算法。Kim 等<sup>[3]</sup>提出基于图像块低秩先验的多能谱 CT 图像重建算法来更好地利用能谱间的图像结构相似性。Rigie 等<sup>[4]</sup>提出梯度域核范数 (TNV) 最小化多能谱 CT 重建算法, 该方法利用各能谱下重建图像相同空间位置像素点的梯度向量具有近似平行的先验信息耦合不同能谱下的结构相似性, 但易导致重建图像过于平滑。另外一些学者提出基于字典学习的多能 CT 重建方法, 来缓解以上固定稀疏变换方法不能自适应图像结构的缺点, 如文献[5-8]提出基于张量字典以及与 TV 相结合的多能 CT 重建算法。与上述基于梯度稀疏, 矩阵低秩分解或者基于局部图像块稀疏变换的重建方法相比, 考虑重建图像的非局部自相似性冗余先验信息, 可进一步提升在投影数据含有较大

收稿日期: 2020-05-21。

基金项目: 国家自然科学基金 (61671104); 国家重大仪器设备开发专项 (2014YQ240445)。

噪声情况下的重建图像质量,如文献[9-11]分别提出谱均值与稀疏变换相结合,改进的非局部全变分(nonlocal TV)方法及非局部相似图像块低秩与稀疏分解的重建方法。

上述方法取得较好效果,但需要用多个独立的正则项建模不同的先验信息。文献[12-13]分别提出 BM3D 变换与低秩相结合,以及非局部张量稀疏分解的多能谱 CT 重建方法,有效提升图像重建质量,但涉及到非凸优化,求解较为复杂,收敛性证明较困难。

针对稀疏角度采样导致数据不足引起的重建伪影以及减小 X 射线源电流导致的噪声干扰问题,本文对传统的梯度域核范数(TNV)正则项进行推广,在利用非局部梯度向量构造了更鲁棒的结构相似性度量基础上,提出非局部核范数全变分(NLTNV)正则项。NLTNV 正则项不仅能促进各能谱下重建图像的非局部梯度稀疏性,而且能通过促进各能谱下图像的非局部梯度向量具有共同的方向来促进各能谱下图像具有结构相似性。

在此基础上,本文提出基于 NLTNV 正则化的稀疏角度采样多能谱 CT 重建算法。所提算法通过 NLTNV 正则项不仅能有效耦合各能谱图像的结构信息,而且能有效利用空间域图像自相似的冗余先验信息,有效提高抗噪性能,恢复图像的细节结构,提升重建整体质量。由于重建模型中只需一个正则化参数,极大地降低了正则化参数选取的难度。此外,由于所提模型为凸优化模型,保证了算法收敛到全局最优解。

## 1 基于 NLTNV 的多能谱 CT 重建方法

多能 CT 图像在梯度域具有稀疏性,空间域具有非局部自相似性以及能量维度具有结构相似性。为了同时利用以上多种先验信息,本文首先定义 NLTNV 正则项,并将其引入到多能 CT 图像重建模型中,有效提高对噪声的鲁棒性,恢复重建图像细节特征。

### 1.1 多能谱 CT 投影模型

目前多能 CT 数据的获取有双源双探测器,单源与“双层”探测器、单源与光子计数探测器以及电压切换等方式<sup>[14]</sup>。本文研究基于电压切换扫描方式的多能谱 CT,具有无需改变现有 CT 系统光源与探测器的优点,采样方式如图 1 所示。该扫描方式通过在扫描过程中依次切换相邻采样角度的 X 射线源电压( $V_1, V_2, \dots, V_M$ ),获取  $M$  个能谱下的投影数据。在实际应用中,一般采用双能谱或者三能谱,因此,  $M$  一般取 2 或者 3。

当利用第  $m$  个电压(第  $m$  个能谱)扫描物体时, X 射线沿路径  $l_i$  穿过物体后的强度  $y_{m,i}$  可表示为:

$$y_{m,i} = I_{m,0} \int G_m(E) \exp\left(-\int_{l_i} \mu(E, \mathbf{r}) d\mathbf{r}\right) dE \quad (1)$$

其中,  $G_m(E)$  为有效能谱,  $I_{m,0}$  为初始的光子强度,  $\mu(E, \mathbf{r})$  表示与能量  $E$  与空间位置  $\mathbf{r}$  相关的物质衰减系数。

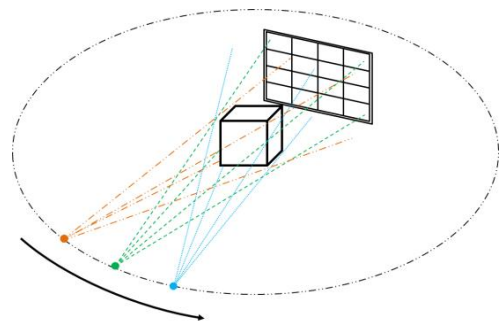


图1 基于电压切换的多能谱 CT 扫描方式  
Fig.1 Multi-energy spectrum CT using voltage switching scanning manner

在可忽略射束硬化的情况下，上述扫描方式的多能谱 CT 正向投影型可线性化表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 &= \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_2 &= \mathbf{p}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_m \mathbf{u}_m &= \mathbf{p}_m \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_M \mathbf{u}_M &= \mathbf{p}_M \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{N_d \times N_1 N_2}$ ,  $\mathbf{p}_m = [p_{m,1}, \dots, p_{m,i}, \dots, p_{m,n_d}] \in \mathbb{R}^{N_d \times 1}$  分别为第  $m$  个能谱的投影矩阵与投影数据,  $p_{m,i} = -\log(y_{m,i}/I_{m,0})$ ,  $N_d = n_d \times S$  为投影的数据个数,  $n_d$  为探测器像元个数,  $S$  为每个能谱下采样角度个数;  $\mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^{N_1 N_2 \times 1}$  为第  $m$  个能谱重建图像  $U_m \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$  的矢量化形式,  $N_1, N_2$  为重建图像的行数与列数。为了简化表示, 式 (2) 可记做  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{p}$ 。

## 1.2 非局部全核变分

对于多能谱 CT 图像  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_m, \dots, \mathbf{U}_M) \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times M}$ , 梯度信息刻画了每一像素点的几何结构变化情况, 是其最重要的信息。像素点  $\mathbf{U}_m(i, j)$  处的离散梯度定义为

$$\nabla \mathbf{U}_m(i, j) = (\nabla_x \mathbf{U}_m(i, j), \nabla_y \mathbf{U}_m(i, j)) \quad (3)$$

其中,  $\nabla_x, \nabla_y$  分别表示水平方向与垂直方向的一阶有限差分, 定义为

$$\nabla_x \mathbf{U}_m(i, j) = \begin{cases} \mathbf{U}_m(i+1, j) - \mathbf{U}_m(i, j), & 0 < i < N_1 \\ 0, & i = N_1 \end{cases} \quad (4)$$

$$\nabla_y \mathbf{U}_m(i, j) = \begin{cases} \mathbf{U}_m(i, j+1) - \mathbf{U}_m(i, j), & 0 < j < N_2 \\ 0, & j = N_2 \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $i, j$  分别表示图像的行与列索引。

虽然多能 CT 图像可以看作多通道图像, 每个能谱下的 CT 图像采用全变分方法<sup>[15-16]</sup>单独重建, 但忽略了不同能谱下 CT 图像的关联。为了建立不同能谱下图像梯度的关联, 文献[4]将单通道图像梯度向量推广为多通道图像的雅克比矩阵:

$$\mathbf{J}\mathbf{U}(i, j) = \begin{pmatrix} \nabla_x \mathbf{U}_1(i, j) & \nabla_y \mathbf{U}_1(i, j) \\ \vdots & \vdots \\ \nabla_x \mathbf{U}_m(i, j) & \nabla_y \mathbf{U}_m(i, j) \\ \vdots & \vdots \\ \nabla_x \mathbf{U}_M(i, j) & \nabla_y \mathbf{U}_M(i, j) \end{pmatrix} \quad (6)$$

因此,  $\mathbf{J}\mathbf{U}(i, j) \in \mathbb{R}^{M \times 2}$  表征了所有能谱下的 CT 图像在位置  $(i, j)$  处像素的梯度信息。

由于物质对不同能量下的 X 射线衰减特性不同, 导致不同能谱下的 CT 重建图像的数值与对比度均不相同, 但图像的局部结构变化 (梯度的方向) 是类似的。换言之, 不同能谱下相同位置像素点的梯度, 具有高度相关的特点, 因此, 雅克比矩阵  $\mathbf{J}\mathbf{U}(i, j)$  具有低秩特性, 文献<sup>[4]</sup>定义了全核变分 (TNV) 正则项来约束这种先验信息, 即

$$\text{TNV}(\mathbf{U}) = \sum_{i,j} \|(\mathbf{J}\mathbf{U})(i,j)\|_* \tag{7}$$

其中  $\|\cdot\|_*$  代表矩阵核范数，为矩阵所有奇异值之和。

TNV 利用梯度向量来耦合不同能谱间图像的结构相似性，只利用了像素的水平与竖直方向的邻域信息，对噪声鲁棒性较差。为了有效利用空间域非局部自相似性冗余先验信息，更好地耦合各通道图像的结构特征，提高抗噪性能，本文基于图像的图导数<sup>[17]</sup>概念，利用非局部梯度向量构造更鲁棒的结构相似性度量。对于矢量化的二维图像  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_1 N_2 \times 1}$ ，在像素点  $\mathbf{u}(i)$  处 ( $1 \leq i \leq N_1 \times N_2$ ) 的图导数定义为：

$$\nabla_{w,q} \mathbf{u}(i) = (\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}(q)) \sqrt{w(i,q)}, \quad \forall q \in \Omega_i, \quad q_{\min} \leq q \leq q_{\max} \tag{8}$$

其中  $q$  表示以像素点  $\mathbf{u}(i)$  为中心大小为  $n_1 \times n_1$  搜索区域  $\Omega_i$  内的像素点的索引， $q_{\min}, q_{\max}$  分别为  $q$  可能取的最小值与最大值， $w(i,q)$  为度量像素对  $\mathbf{u}(i)$  与  $\mathbf{u}(q)$  相似性度的权重，定义为：

$$w(i,q) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{b}(i) - \mathbf{b}(q)\|}{2h^2}\right) \tag{9}$$

其中  $\mathbf{b}(i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  与  $\mathbf{b}(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  分别代表以像素点  $\mathbf{u}(i)$ ， $\mathbf{u}(q)$  为中心大小为  $n_2 \times n_2$  的图像块， $h$  为控制权重衰减快慢的参数。

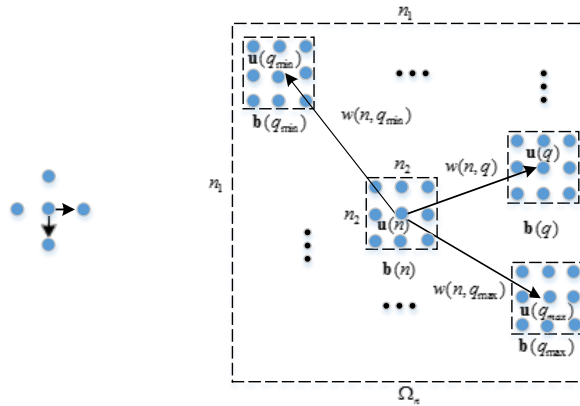


图2 梯度与图导数示意图  
Fig.2 Gradient and graph derivatives

本文将图导数的概念拓展到多能谱图像  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^T, \dots, \mathbf{u}_m^T, \dots, \mathbf{u}_M^T]^T \in \mathbb{R}^{N_1 N_2 M \times 1}$ ，定义非局部雅克比矩阵为：

$$J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) = \begin{pmatrix} \nabla_{w_i} \mathbf{u}_1(i) \\ \vdots \\ \nabla_{w_i} \mathbf{u}_m(i) \\ \vdots \\ \nabla_{w_i} \mathbf{u}_M(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{w, q_{\min}} \mathbf{u}_1(i) & \cdots & \nabla_{w, q} \mathbf{u}_1(i) & \cdots & \nabla_{w, q_{\max}} \mathbf{u}_1(i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \nabla_{w, q_{\min}} \mathbf{u}_m(i) & \cdots & \nabla_{w, q} \mathbf{u}_m(i) & \cdots & \nabla_{w, q_{\max}} \mathbf{u}_m(i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \nabla_{w, q_{\min}} \mathbf{u}_M(i) & \cdots & \nabla_{w, q} \mathbf{u}_M(i) & \cdots & \nabla_{w, q_{\max}} \mathbf{u}_M(i) \end{pmatrix} \tag{10}$$

其中  $J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) \in \mathbb{R}^{M \times Q}$ ， $Q$  为  $\Omega_i$  内的像素个数， $w_i = (w(i, q_{\min}), \dots, w(i, q), \dots, w(i, q_{\max}))$ 。

为了节省计算量，同时减小权重数值对度量不同能谱下图像结构相似性的影响，本文将式 (9) 改进为：

$$w(i, q) = \begin{cases} 1, & i, q \in S \\ 0 & \end{cases} \quad (11)$$

其中  $S$  定义为搜索窗口内  $L$  个与当前图像块（以像素点  $i$  为中心的图像块）最相似的图像块（按欧式距离计算图像块之间的距离）中心像素  $q$  的索引集合，本文  $L$  取 8。显然，只有当  $w(i, q) = 1$  时代表像素对连通，进行导数运算。通过权重  $w$  定义像素对之间的连通性，可以更加灵活刻画图像的非局部结构相似信息。为了更好的耦合各能谱下图像的结构相似性，本文将不同能谱下的权重统一为相同的分布。

由于不同能谱下的重建图像彼此结构相似，图导数向量近似平行， $J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)$  满足低秩特性，在数学意义下等价于  $J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)$  的核范数最小，因而本文定义非局部全核变分 (NLTV) 为：

$$NLTV(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \left\| J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) \right\|_* = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^Q \sigma_{i,t} \quad (12)$$

其中  $\sigma_{i,t}$  为  $J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)$  的第  $t$  个奇异值。

为了说明 NLTV 正则项同时具有促进不同能谱下图像彼此之间的结构相似性与空间域的非局部自相似性的作用，本文给出如下分析，首先引入一般矩阵的范数：对于矩阵

$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，有  $\|\mathbf{C}\|_F = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |c_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ 。根据范数的定义，则有：

$$\left\| J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) \right\|_F = \left( \sum_{m=1}^M \sum_{q=q_{\min}}^{q_{\max}} |\nabla_{w,q} \mathbf{u}_m(i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

进一步，本文引入文献<sup>[18]</sup>中的定理：设  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$  为矩阵  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  的奇异值，则有

$$\|\mathbf{C}\|_F = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2)^{\frac{1}{2}}。$$

对非局部雅克比矩阵  $J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)$  应用上述定理，则有：

$$\left\| J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) \right\|_F^2 = \sum_{t=1}^Q \sigma_{i,t}^2 \quad (14)$$

而对于  $\sigma_{i,1} \geq \dots \geq \sigma_{i,t} \geq \dots \geq \sigma_{i,Q} > 0$ ，有如下不等式成立：

$$\sum_{t=1}^Q \sigma_{i,t}^2 \leq \left( \sum_{t=1}^Q \sigma_{i,t} \right)^2 \quad (15)$$

根据上述不等式，结合矩阵的核范数定义，有：

$$\left\| J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) \right\|_F \leq \left\| J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) \right\|_* \quad (16)$$

进一步，有：

$$\sum_{i=1}^N \left\| J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^N \left\| J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) \right\|_* \quad (17)$$

因此, 使  $\sum_{i=1}^N \|J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)\|_*$  最小化, 同样会使  $\sum_{i=1}^N \|J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)\|_F$  减小, 当  $\sum_{i=1}^N \|J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)\|_*$  达到较小值时,  $\sum_{i=1}^N \|J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)\|_F$  同样取较小的值, 其表明 NLTNV 正则项会促进各能谱下图像的非局部梯度稀疏性, 能有效利用非局部自相似先验信息。另一方面, 最小化  $\sum_{i=1}^N \|J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)\|_*$ , 会使  $J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)$  具有低秩特性, 即利用各能谱下 CT 图像的局部梯度向量具有相关性来促进彼此具有结构相似性。

由于 NLTNV 正则项需要根据如式 (11) 所示的图像的非局部自相似权重计算图导数, 因此, 需要重建初始图像用于计算上述权重。本文采用基于局部图像块低秩的方法<sup>[3]</sup>重建初始图像, 计算权重。

### 1.3 基于 NLTNV 的图像重建优化模型及求解

针对多能谱 CT 重建问题, 利用所定义的 NLTNV 正则项, 本文提出如下凸优化图像重建模型:

$$\min_{\mathbf{u}} \text{NLTNV}(\mathbf{u}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2 \quad (18)$$

将式 (12) 的定义带入 (18), 重建模型进一步表示为:

$$\min_{\mathbf{u}} \sum_{i=1}^N \|J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i)\|_* + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2 \quad (19)$$

式 (19) 中的第 1 项为图导数的核范数, 直接求解较困难, 本文采用交替优化策略<sup>[19]</sup>求解 (19), 引入辅助变量  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N)$ , 将以上无约束优化问题转化为如下约束优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{X}_i\|_* + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2 \\ \text{s.t. } J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) = \mathbf{X}_i \end{aligned} \quad (20)$$

约束优化问题 (20) 的增广 Lagrange 函数为:

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{X}_i\|_* + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{\rho}{2} \|J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) - \mathbf{X}_i + \boldsymbol{\lambda}_i\|^2 \quad (21)$$

其中,  $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \dots, \boldsymbol{\lambda}_i, \dots, \boldsymbol{\lambda}_N)$ , 为 Lagrange 乘子,  $\rho > 0$  为罚系数。

利用 ADMM 算法, 优化式 (21) 可转化为交替求解如下子问题:

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{X}} L(\mathbf{X}, \mathbf{u}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \\ \mathbf{u}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u}} L(\mathbf{X}^{k+1}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^k) \\ \boldsymbol{\lambda}_i^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_i^k + (J_{NL, w_i} \mathbf{u}^{k+1}(i) - \mathbf{X}_i^{k+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (22)$$

(1) 求解变量  $\mathbf{X}$  子问题

关于变量  $\mathbf{X}$  子问题是可分的, 可进一步分解为  $N$  个如下子问题:

$$\mathbf{X}_i^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{X}_i} \|\mathbf{X}_i\|_* + \frac{\rho}{2} \|J_{NL, w_i} \mathbf{u}^{k+1}(i) - \mathbf{X}_i + \boldsymbol{\lambda}_i^k\|^2, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (23)$$

式 (23) 是关于核范数的迫近点问题, 根据文献<sup>[20]</sup>, 其解析解可表示为:

$$\mathbf{X}_i^{k+1} = \text{SVT}_{1/\rho} \left( J_{NL, w_i} \mathbf{u}^k(i) + \boldsymbol{\lambda}_i^k \right) \quad (24)$$

其中,  $\text{SVT}_\tau(\cdot)$  为奇异值阈值操作, 即:

$$\text{SVT}_\tau(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_1^T \text{diag}(\max(\sigma_i - \tau, 0)) \mathbf{F}_2 \quad (25)$$

其中,  $\mathbf{X} = \mathbf{F}_1^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}_2$  为矩阵  $\mathbf{X}$  的奇异值分解,  $\sigma_t = \boldsymbol{\Sigma}(t, t)$  为第  $t$  个奇异值,  $\text{diag}(\cdot)$  表示对角矩阵。

(2) 求解变量  $\mathbf{u}$  子问题

当固定  $\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}$  的取值为  $\mathbf{X}_i^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_i^k$  时, 关于  $\mathbf{u}$  的子问题是一个凸二次优化问题:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u}} \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2 + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^N \|J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) - \mathbf{X}_i^{k+1} + \boldsymbol{\lambda}_i^k\|^2 \quad (26)$$

利用式 (26) 的一阶最优性条件, 即其梯度为 0, 可得

$$\mu \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{p}) + \rho \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_{NL, w_i}^T (J_{NL, w_i} \mathbf{u}(i) - \mathbf{X}_i^{k+1} + \boldsymbol{\lambda}_i^k) = 0 \quad (27)$$

经过整理得到如下的线性方程组:

$$\left( \mu \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \rho \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_{NL, w_i}^T \mathbf{J}_{NL, w_i} \right) \mathbf{u} = \mu \mathbf{A}^T \mathbf{p} + \rho \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_{NL, w_i}^T (\mathbf{X}_i^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_i^k) \quad (28)$$

由于上述线性方程组系数矩阵满足对称正定性, 因此, 采用共轭梯度方法<sup>[21]</sup>求解。

(3) 更新乘子

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_i^k + \mathbf{J}_{NL, w_i} \mathbf{u}^{k+1}(i) - \mathbf{X}_i^{k+1}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (29)$$

根据以上公式推导, 所提多能谱 CT 图像重建算法实现步骤总结为算法 1, 算法的收敛性与经典的 ADMM 算法相同, 由文献<sup>[22]</sup>给出。

表 1 基于 NLTNV 正则化的多能谱 CT 重建算法

Table 2 Multi-energy spectral CT image reconstruction using NLTNV regularization

算法 1: 基于 NLTNV 正则化的多能谱 CT 重建算法

初始化: 根据初始图像计算非局部相似权重  $w(i, q)$ , 设置最大迭代次数  $N_{\max}$  和容许误差  $\varepsilon$ , 令  $k=0$ ,  $\mathbf{u}^0$ 。

While ( $k \leq N_{\max}$  并且  $\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\| > \varepsilon$ )

(1) For  $i=1:N$

根据式 (24), 计算  $\mathbf{X}_i^{k+1}$ ;

End

(3) 共轭梯度优化算法求解式 (28), 得到  $\mathbf{u}^{k+1}$ ;

(4) 根据式 (29) 更新乘子;

(5)  $k=k+1$ ;

End

输出: 重建图像  $\mathbf{u}$

## 2 实验与结果分析

为了验证所提正则项化方法的有效性, 本文进行仿真与实际实验, 结果与基于 TNV 正则化的方法<sup>[4]</sup>进行比较。为便于叙述, 基于模型 (18) 的重建算法简称为 NLTNV 重建算法。由于计算图导数需要确定每个像素搜索与其相似的像素的区域 (搜索窗) 大小以及计算相似权重的图像块大小, 为了平衡计算量与算法性能, 搜索窗设为 11 像素×11 像素, 图像块大小设为 3 像素×3 像素。为了公平比较各种算法的性能, 每种算法选取最优的正则化参数。本文用根均方误差 (RMSE), 峰值信噪比 (PSNR) 指标来评价重建图像的数值准确性, 用结构相似指数<sup>[23]</sup> (SSIM) 指标评价重建图像与参考图像的结构相似性。对于第  $m$  个能谱重建图像, 其定义分别为:

$$\text{RMSE}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m,\text{ref}}) = \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}} \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_{m,\text{ref}}\|^2 \quad (30)$$

$$\text{PSNR}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m,\text{ref}}) = 20 \log_{10} \left( \frac{\max(\mathbf{u}_{m,\text{ref}})}{\text{RMSE}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m,\text{ref}})} \right) \quad (31)$$

$$\text{SSIM}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m,\text{ref}}) = \frac{2\bar{u}_m \bar{u}_{m,\text{ref}} (2v_{12} + c_2)}{(\bar{u}_m^2 + \bar{u}_{m,\text{ref}}^2 + c_1)(v_1^2 + v_2^2 + c_2)} \quad (32)$$

其中  $\bar{u}_m$  和  $\bar{u}_{m,\text{ref}}$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_{12}$  分别为重建图像  $\mathbf{u}_m$  和参考图像  $\mathbf{u}_{m,\text{ref}}$  的均值, 方差与协方差,  $c_1$  和  $c_2$  为常数。由于上述指标是对 2 维图像定义的, 本文取所有能谱重建图像的上述指标的均值作为数值评价。

实验中均采用扇形束扫描方式, 成像参数如表 2 所示。

表 2 CT 成像参数  
Table 2 CT imaging parameters

CT 成像参数
射线源到探测器的距离: 1 400 mm
射线源到旋转轴的距离: 1 000 mm
探测器的分辨率: 1 024
探测器的像元尺寸: 0.2 mm
重建图像的分辨率: 256 × 256
重建图像的像素尺寸: 0.5 mm × 0.5 mm

### 2.1 仿真实验

仿真实验采用大小为 256 像素×256 像素的人体横断面数值模体, 如图 3 所示。

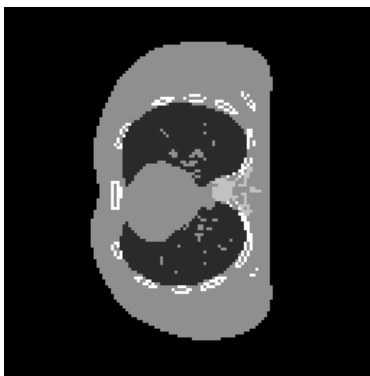


图 3 数值仿真模体

Fig. 3 Numerical phantom for simulation

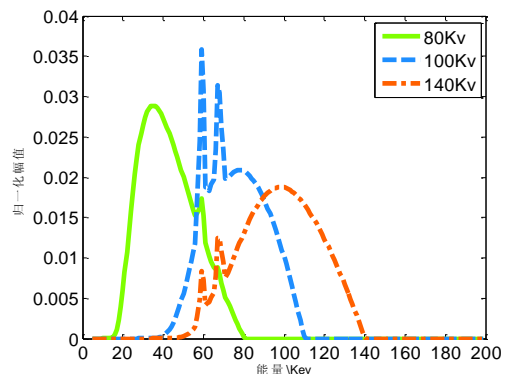
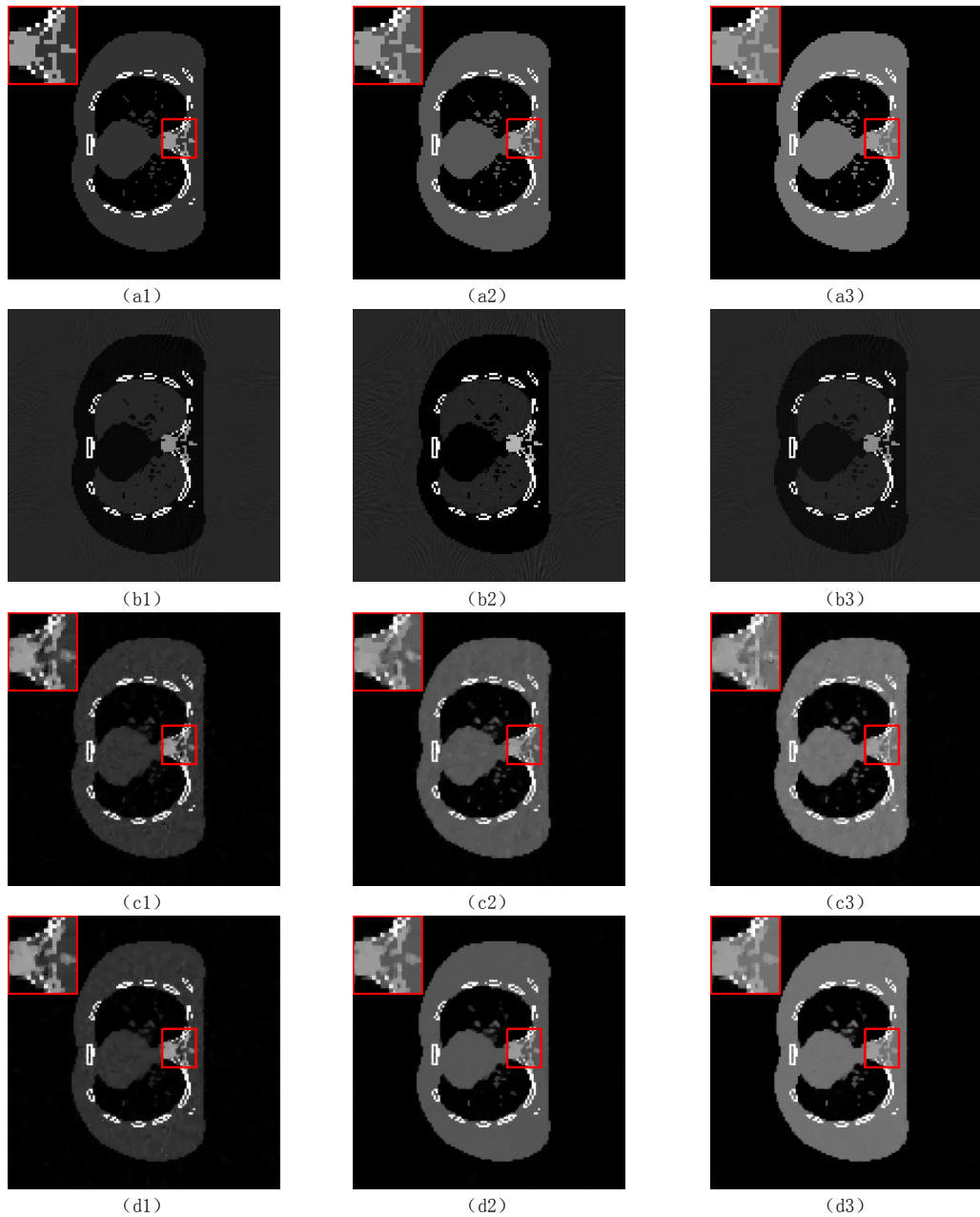


图 4 仿真能谱

Fig. 4 Simulated energy spectra





注：(a) 参考图像；(b) 能量比下相差常数倍后的误差图像；(c) TNV 算法重建的图像；(d) NLTV 算法重建的图像。  
第 1 列为各算法 80 kVp 的重建结果，第 2 列为各算法 100 kVp 的重建结果，第 3 列为各算法 140 kVp 的重建结果。

图 5 仿真数据重建结果

Fig.5 Reconstruction results of simulation data

为了模拟实际噪声，实验中采用泊松高斯混合噪声模型对仿真投影数据加噪声<sup>[24]</sup>，即：

$$y_{m,i} = \text{Poisson} \left( I_{m,0} \int G_m(E) \exp \left( - \int_{l_i} \mu(E, \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) dE \right) + N(0, \eta^2) \quad (33)$$

其中， $I_{m,0}$  与  $y_{m,i}$  分别为第  $i$  条射线初始光子数与其对应的探测器测量值， $G_m(E)$  为归一化

能谱,  $\mu(E, \mathbf{r})$  为与能量  $E$  和空间位置  $\mathbf{r}$  有关的物质衰减系数<sup>[25]</sup>, 利用式 (33) 产生各能谱下的投影。 $\eta^2$  为高斯噪声的方差。

为了模拟较低剂量的稀疏角度投影, 仿真设置每条 X 射线的光子数为  $I_{m,0} = 10^4$ , 高斯噪声方差为  $\eta^2 = 50$ , 此时在 80、100 和 140 kVp 电压下对应的仿真能谱  $G_m(E)$  ( $m=1, 2, 3$ ) 如图 4 所示, 投影平均信噪比分别为 28.57、28.75 和 28.97 dB。稀疏角度采样条件为按照图 1 所示扫描方式, 每个能谱下在  $[0^\circ, 360^\circ)$  内等间隔采 60 个角度投影。

图 5 为各算法的重建结果, 从左向右每一列依次为 80、100 与 140 kVp 重建结果, 其中图 5 (a1) ~ 图 5 (a3) 为 720 个角度投影的 FBP 算法重建的参考图像; 图 5 (b1) ~ 图 5 (b3) 分别为图 5 (a1) 与图 5 (a2)、图 5 (a1) 与图 5 (a3)、图 5 (a2) 与图 5 (a3) 在其相应能量比下相差常数倍后的误差图像, 用于观察不同能谱下重建图像的对比如差异; 图 5 (c1) ~ 图 5 (c3) 为 TNV 方法重建结果; 图 5 (d1) ~ 图 5 (d3) 为 NLTV 方法重建结果。

从重建结果可看出, TNV 与 NLTV 两种算法均能有效消除各个能谱下稀疏采样导致的重建伪影, 但对噪声的抑制情况各不相同。虽然 TNV 方法可较好地利用各个能量重建图像的结构相似性信息, 但是只用到了像素的邻域先验信息, 在抑制噪声的同时, 将图像的细节平滑掉, 导致重建图像的整体过于平滑。与 TNV 方法相比, NLTV 方法充分利用空间域非局部自相似性先验信息恢复结构特征, 重建图像的细节结构更加清晰, 并且具有更好的抗噪性能。进一步, 从放大的 ROI 可看出, TNV 算法重建的图像存在较大的失真, 产生明显的“块状效应”, 细节结构被平滑掉, 并且仍然含有少量的噪声导致的伪影。从放大的 ROI 可观察到, 本文所提算法更好地保护微小的结构特征, 更有效地抑制噪声所导致的伪影, 同时较好地保留了弱对比度的边缘。

各算法在每个能谱 60 个角度条件下所有能谱重建图像的平均 RMSE, PSNR, SSIM 由表 3 给出。从定量结果可看出 NLTV 方法的重建结果更加接近真值。

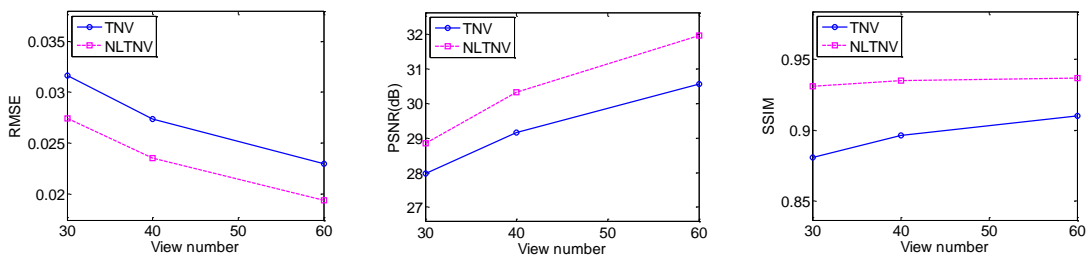
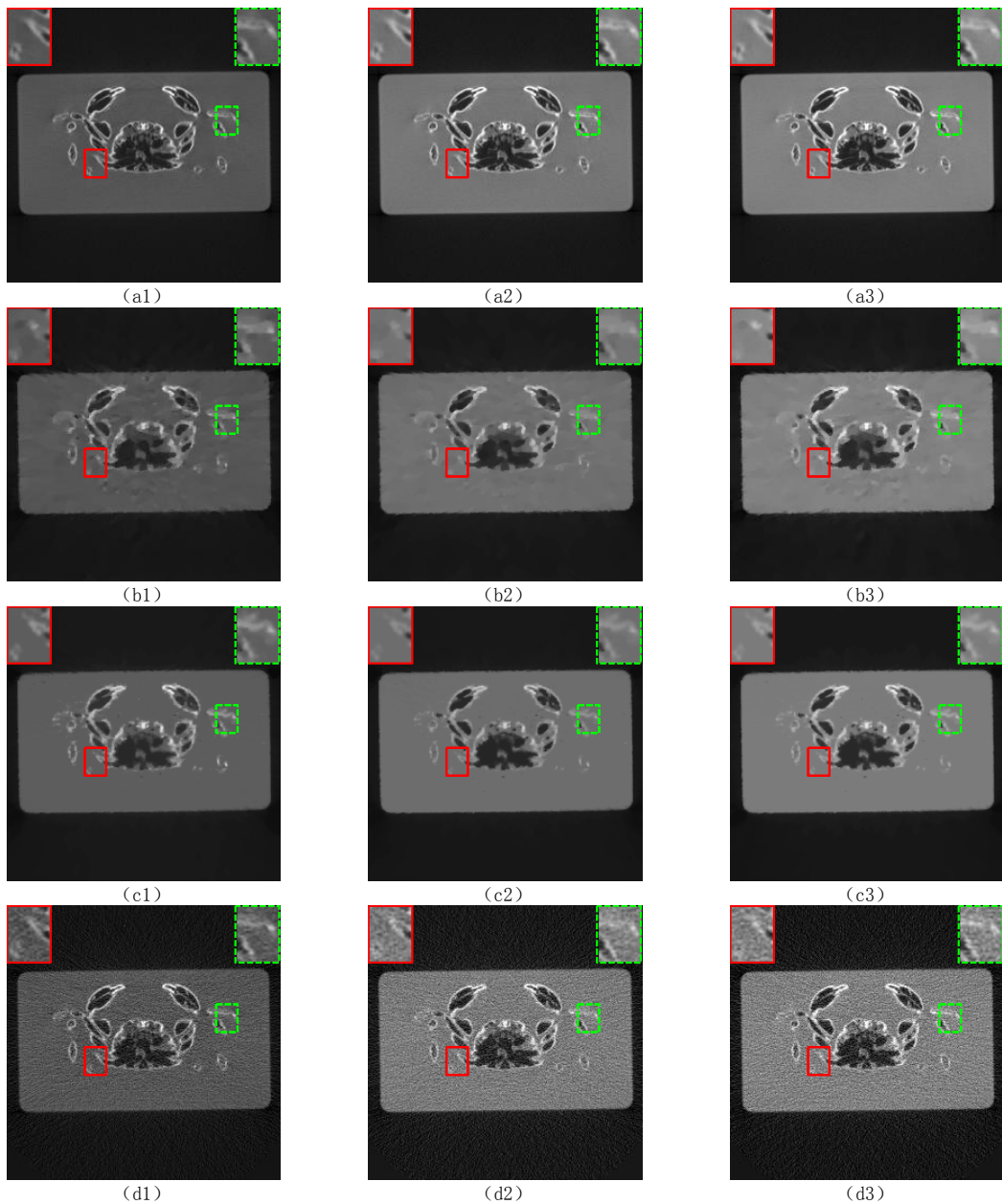


图 6 仿真数据重建图像的 RMSE, PSNR 与 SSIM 随稀疏角度变化情况

Fig. 6 RMSE, PSNR and SSIM comparisons of reconstructed images using simulation data with different number of sparse sampling views

为了进一步验证所提算法的有效性, 本文进行不同稀疏角度采样条件下的重建图像实验, 各算法的所有能谱下重建图像的平均 RMSE, PSNR, SSIM 与采样角度个数的关系如图 6 所示。从图 6 结果可看出, 在各稀疏采样条件下 NLTV 算法的重建结果均好于 TNV 的重建

结果。实验结果表明，所提算法可以较准确地重建各个能谱下的图像，可为进一步实现基图像物质分解提供良好的基础。



注：(a) 参考图像；(b) TNV 算法重建的图像；(c) NLTV 算法重建的图像；(d) 含较大噪声投影的 FBP 算法重建的图像  
第 1 列为各算法 80kVp 重建结果，第 2 列为各算法 100kVp 重建结果，第 3 列为各算法 140kVp 重建结果。

图 7 实际数据重建结果  
Fig.7 Reconstruction results of real data

## 2.2 实际实验

实验中 X 射线源电压分别设为 80、110 和 140 kVp，电流均设为 5mA（高剂量情况），扫

描实验样品,各电压下分别在  $[0^\circ, 360^\circ)$  内等角度间隔采样获取 720 个角度投影重建参考图像,结果如图 7 (a1) ~图 7 (a3) 所示。为了获取剂量较低情况的投影,电压为 80、110 和 140 kVp 时,电流分别设为 1.5 mA、1.2 mA 和 1 mA,其中在 80 kVp 下以  $0^\circ$  为采样起始角度在  $[0^\circ, 360^\circ)$  内等角度间隔采集 60 个角度投影,其他两个电压分别以  $2^\circ, 4^\circ$  为采样起始角度,按相同的方式采集投影,以上所有投影数据用于 TNV 与 NLTNV 算法重建,结果分别如图 7 (b1) ~图 7 (b3) 与图 7 (c1) ~图 7 (c3) 所示。此外,为了与传统的解析算法进行对比,在相同电压与电流的情况下,每个电压下采集 720 个角度较低剂量的投影,用于 FBP 算法重建,结果如图 7 (d1) ~图 7 (d3) 所示。

图 7 为各算法的重建结果,从左向右每一列依次为 80、100 和 140 kVp 重建结果。从图 7 (b1) ~图 7 (b3) 可看出,在低剂量的情况下,TNV 方法在抑制噪声的同时导致各能谱下重建图像过于平滑,无法重建出低对比度的结构信息。从相应的细节放大图可观察到,对比度较弱的细节变模糊,难以辨别。从图 7 (c1) ~图 7 (c3) 可看出,NLTNV 方法重建的各能谱图像细节更加清晰,这是由于 NLTNV 利用了图像的非局部自相似性,能较好地恢复微小的结构特征,同时有效抑制噪声。进一步与图 7 (d1) ~图 7 (d3) 对比,可看出噪声会导致传统的 FBP 重建图像严重降质,而 NLTNV 算法在使用较少的投影数据情况,较准确地恢复了图像的细节信息,消除噪声干扰。

为了进一步对比 TNV 与 NLTNV 在不同稀疏角度采样条件下的算法性能,图 8 给出两种算法在不同稀疏角度个数下的所有能谱下重建图像的平均 RMSE, PSNR, SSIM。与仿真情况类似,在各稀疏角度采样情况下,NLTNV 算法重建结果相对于 TNV 算法重建结果均有较大的提升。从实验结果可看出,在视觉与定量评价方面,NLTNV 方法均好于 TNV 方法。

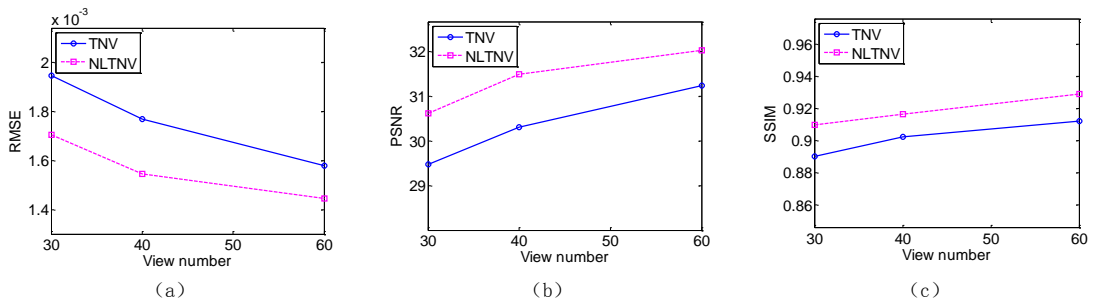


图 8 际数据重建图像的 RMSE, PSNR 与 SSIM 随角度个数变化情况

Fig. 8 RMSE, PSNR and SSIM comparisons of reconstructed images using real data with different number of sparse sampling views

### 3 结论

本文提出一种基于 NLTNV 正则化的多能 CT 重建算法,其优点在于利用单个正则项,同时建模重建图像的多种先验信息,即在能谱维度上的结构相似性,梯度域的稀疏性与空间域的非局部自相似性,能有效利用上述多种先验信息恢复多个能谱下图像结构特征,为进一步实现剂量较低条件下基于重建图像的物质分解提供良好的基础。由于重建模型中只有单个正则项,因而降低了正则化参数选取难度。仿真与实际实验表明该算法与基于 TNV 正

则化的重建方法相比优势明显, 显著提升重建图像整体质量。此外, NLTNV 正则化方法同样适用于其他方式采集多能数据的 CT 图像重建问题, 如光子计数探测器等。

## 参考文献

- [1] MCCOLLOUGH C H, LENG S, YU L, et al. Dual- and multi-energy CT: Principles, technical approaches, and clinical applications[J]. *Radiology*, 2015, 276(3): 637-653.
- [2] GAO H, YU H, OSHER S, et al. Multi-energy CT based on a prior rank, intensity and sparsity model (PRISM) [J]. *Inverse Problems*, 2011, 27(11): 115012-115033.
- [3] KIM K, YE J C, WORSTELL W, et al. Sparse-view spectral CT reconstruction using spectral patch-based low-rank penalty[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2015, 34(3): 748-760.
- [4] RIGIE D S, LA RIVIRE P J. Joint reconstruction of multi-channel, spectral CT data via constrained total nuclear variation minimization[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2015, 60(5): 1741-1762.
- [5] ZHANG Y, MOU X, WANG G, et al. Tensor-based dictionary learning for spectral CT reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2017, 36(1): 142-154.
- [6] 陈佩君, 冯鹏, 伍伟文, 等. 基于图像总变分和张量字典的多能谱 CT 材料识别研究[J]. *光学学报*, 2018, 38(11): 125-132.
- [7] CHEN P J, FENG P, WU W W, et al. Material discrimination by multi-spectral CT based on image total variation and tensor dictionary[J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(11): 125-132. (in Chinese).
- [8] WU W, ZHANG Y, WANG Q, et al. Low-dose spectral CT reconstruction using image gradient L0-norm and tensor dictionary[J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2018, 63: 538-557.
- [9] ZHANG Y, XI Y, YANG Q, et al. Spectral CT reconstruction with image sparsity and spectral mean[J]. *2015 IEEE Transactions on Computational Imaging*, 2016, 2(4): 510-523.
- [10] 张海娇, 孔慧华, 孙永刚. 基于结构先验的加权 NLTV 能谱 CT 重建算法[J]. *光学学报*, 2018, 38(8): 0811003.  
ZHANG H J, KONG H H, SUN Y G. Weighted NLTV reconstruction algorithm based on structural prior information for spectral CT[J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(8): 0811003. (in Chinese).
- [11] NIU S, YU G, MA J, et al. Nonlocal low-rank and sparse matrix decomposition for spectral CT reconstruction[J]. *Inverse Problems*, 2018, 34(2): 024003.
- [12] SALEHJAHROMI M, ZHANG Y, YU H. Iterative spectral CT reconstruction based on low rank and average-image-incorporated BM3D[J]. *Physics in Medicine & Biology*, 2018, 63: 155021.
- [13] WU W, LIU F, ZHANG Y, et al. Non-local low-rank cube-based tensor factorization for spectral CT reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2018, 38(4): 1079-1093.
- [14] HEISMANN B J, SCHMIDT B T, FLOHR T. Spectral computed tomography[M]. Bellingham, Washington: SPIE, 2012.
- [15] ZHANG Z, HAN X, PEARSON E, et al. Artifact reduction in short-scan CBCT by use of optimization-based reconstruction[J]. *Physics in Medicine & Biology*, 2016, 11: 3387-3406.
- [16] ZHANG Z, YE J, CHEN B, et al. Investigation of optimization-based reconstruction with an image-total-variation constraint in PET[J]. *Physics in Medicine & Biology*, 2016, 61(16): 6055.
- [17] GILBOA G, OSHER S. Nonlocal operators with applications to image processing[J]. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2009, 7(3): 1005-1028.
- [18] 张宏伟, 金光日, 施吉林, 等. 计算机科学计算[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012: 82-83.
- [19] RAMANI S, FESSLER J A. A splitting-based iterative algorithm for accelerated statistical X-ray CT reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2012, 31(3): 677-688.
- [20] CAI J F, CANDÈS E J, SHEN Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, 20(4): 1956-1982.
- [21] 王宜举, 修乃华. 非线性最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 49-51.

- [22] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations & Trends in Machine Learning, 2010, 3(1): 1-122.
- [23] WANG Z, BOVIK A C, SHEIKH H R, et al. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 600-612.
- [24] WANG J, LI T F, XING L. Iterative image reconstruction for CBCT using edge preserving prior[J]. Medical Physics, 2009, 36(1): 252-260.
- [25] HUBBELL J H. Photon mass attenuation and energy-absorption coefficients[J]. International Journal of Applied Radiation & Isotopes, 1982, 33(11): 1269-1290.

## Nonlocal Total Nuclear Variation Based Method for Multi-energy CT Image Reconstruction

CHENG Kai<sup>1</sup>, YANG Xueqin<sup>2</sup>, SUN Yi<sup>1</sup>✉

1.School of Information and Communication, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China  
2.Shanxi North Xing'an Chemical Industry Co., Ltd., Taiyuan, 030023, China

**Abstract:** Sparse view sampling and reducing current of X-ray source can effectively reduce radiation dose of multispectral CT, but it will make the projection data insufficient and noisy, leading to serious degeneration of the reconstructed images. To address this problem, we extend the traditional total nuclear variation (TNV) and propose the nonlocal total nuclear variation (NLTV) regularization method by employing the low rank property of Jacobian matrix composed of nonlocal gradient vector. The proposed method uses only one regularization term to model three kinds of prior information (the structural similarity along energy dimension, the sparsity of image gradient and the spatial nonlocal self-similarity) to restore image details in low dose case, which can effectively alleviate the problem of using too many regularization parameters in reconstruction model, caused by employing multiple independent regularization terms to model different prior information of multispectral CT image. In addition, the reconstruction model based on NLTV is a convex model, which guarantees the stability and convergence of the algorithm. The experimental results show that compared with the TNV regularization method, the proposed method can significantly improve the overall quality of the reconstructed images.

**Keywords:** multispectral CT image reconstruction; graph derivative; nonlocal self similarity; nonlocal total nuclear variation; convex optimization model



**作者简介:** 程凯 (1988—), 男, 大连理工大学信息与通信工程学院博士生, 主要从事 CT 图像重建方面的研究, E-mail: Chengkai\_dlut@163.com; 孙怡✉ (1964—), 女, 大连理工大学信息与通信工程学院教授、博士生导师, 主要从事 CT 成像理论与应用方面的研究, E-mail: lslwf@dlut.edu.cn。